

تحلیل ارتعاش آزاد عرضی کابل با استفاده از روش جدا سازی ادمین

رضا احراری^۱

reza_ahrari@yahoo.com

محمد شادکامی^۲

محمد حسین ابوالبشری^۳

چکیده

در این مقاله روش جداسازی ادمین به منظور بررسی ارتعاش آزاد یک کابل دو تکه به کار گرفته شده است. هر قسمت از کابل به صورت مجزا توسط این روش تحلیل شده است. با اعمال شرایط پیوستگی و شرایط مرزی، فرکانس‌های طبیعی و شکل مدهای مربوطه به سادگی و به صورت هم‌زمان به دست می‌آید. با ارائه چند مثال برای شرایط مرزی مختلف، این مقادیر محاسبه شده‌اند. نتایج به دست آمده از راه‌حل‌های تحلیلی و عددی ذکر شده در مقاله با دقت خوبی نتایج حاصله از این روش را تایید می‌نمایند و مشخص می‌کنند که روش ادمین یک روش موثر و قابل اطمینان بوده و نسبت به سایر تحلیل‌های ارتعاشی کارآمدتر و ساده‌تر می‌باشد. در بخش پایانی، تاثیر میزان پارامترهای جرم و سختی فنر در شرایط مرزی بر میزان و نحوه تغییرات فرکانس‌های طبیعی بررسی شده و یک راهکار موثر برای برخورد با این‌گونه شرایط مرزی پیشنهاد شده است.

واژه‌های کلیدی: ارتعاش آزاد، کابل، روش جدا سازی ادمین، شکل مد، فرکانس طبیعی.

۱- دانشجوی دکتری مکانیک، دانشگاه فردوسی، مشهد

۲- مربی، موسسه آموزش عالی اشراق، بجنورد

۳- استاد، گروه مکانیک، مرکز پژوهشی مهندسی تولید ناب، دانشگاه فردوسی مشهد

۱- مقدمه

مزیت دیگر این روش همگرایی سریع آن است. این روش تنها نیازمند تعدادی اندک از جملات سری جواب می‌باشد تا بتواند تخمین حل مسئله را با دقت بالا به ارمغان آورد [۱۵].

در این مقاله از روش ادمین به منظور حل ارتعاشات عرضی کابل استفاده شده است. با اعمال این روش به مساله، زوج معادلات دیفرانسیلی حاکم به معادلات جبری بازگشتی تبدیل می‌گردند و استفاده از شرایط مرزی در دو انتها منتج به معادلات ساده جبری فرکانسی می‌گردد که مناسب حل پارامتریک می‌باشد. پس از انجام چند عملیات جبری ساده هر فرکانس طبیعی دلخواه به همراه شکل مد مربوطه به صورت هم‌زمان حاصل می‌گردد. چندین مثال با شرایط مرزی مختلف به صورت تحلیلی و نیز با استفاده از این روش حل شده‌اند. نتایج حاصل از حل ادمین تطابق بسیار خوبی را با نتایج حل تحلیلی نشان می‌دهند که این موضوع نشان دهنده دقت و کارآمدی این روش می‌باشد. در بخش پایانی تاثیر پارامترهای جرم و سختی فنر بر میزان و نحوه تغییرات فرکانس‌های طبیعی تحت بررسی قرار می‌گیرد. شایان ذکر است که ارتعاشات عرضی کابل در بسیاری از مسائل مهندسی کاربرد گسترده‌ای دارد.

۲- معرفی روش ادمین

در این بخش روش ادمین شرح داده می‌شود. یک معادله دیفرانسیل در حالت کلی را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$Ly + Ry = g(x) \quad (1)$$

که در آن عملگر L شامل بالاترین مرتبه مشتق موجود، R شامل سایر مشتقات و $g(x)$ تابع معمولی معادله است. حل این معادله بر حسب Ly نتیجه می‌دهد:

$$y = \Phi + L^{-1}g - L^{-1}Ry \quad (2)$$

در معادله (۲)، Φ ثابت انتگرال‌گیری بوده به طوری که $L\Phi=0$ به منظور حل معادله فوق با روش ادمین، y را می‌توان به صورت معادله (۲) نتیجه می‌دهد:

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k = \Phi + L^{-1}g - L^{-1}R \sum_{k=0}^{\infty} y_k \quad (3)$$

با فرض $y_0 = \Phi + L^{-1}g$ در معادله فوق، معادله بازگشتی زیر حاصل می‌گردد:

$$y_k = -L^{-1}Ry_{k-1} \quad k \geq 1 \quad (4)$$

در عمل تمامی جملات سری معادله (۳) به صورت دقیق قابل تعیین نمی‌باشد، هرچند پاسخ می‌تواند به صورت سری $y = \sum_{k=0}^{n-1} y_k$ تخمین زده شود.

پدیده‌های غیر خطی نقش بسیار مهمی را در علوم کاربردی ایفا می‌کنند. اغلب روش‌های تحلیلی برای حل معادلات دیفرانسیل غیر خطی، یا از روش خطی سازی استفاده کرده و یا از آثار غیر خطی صرف نظر می‌نمایند و مقدار آن را ناچیز فرض می‌کنند. هرچند این فرض باعث می‌گردد که حل واقعی مدل‌های ریاضی که پدیده‌های فیزیکی را به صورت دقیق توصیف می‌کنند تغییر یابند. همچنین روش‌های عددی که بر پایه گسسته‌سازی بنا شده‌اند در تمامی بازه‌های زمانی و محدوده‌های فضا موثر نیستند.

تعداد بسیار زیادی از روش‌های حل تحلیلی و عددی نظیر روش دو سویه هیروتا [۱]، روش متقارن [۲]، روش پرتو برین هوموتوپی [۳]، روش تکرار متغیر [۴] و سایر روش‌های عددی برای حل این گونه از مسائل استفاده شده‌اند.

در این پژوهش، یک دیدگاه جدید محاسباتی که روش جداسازی ادمین گفته می‌شود برای حل مسائل ارتعاشی کابل استفاده شده است. روش ادمین برای حل معادلات خطی و غیر خطی به عنوان یک راه حل موثر و قابل اطمینان به اثبات رسیده است [۵-۷]. اخیراً از این روش برای حل مسائل ارتعاشی سیستم‌های سازه‌ای و مکانیکی بهره گرفته شده است [۸، ۹].

ماتو [۱۰] از ادمین برای بررسی ارتعاشات تیرهای اویلر برنولی با سطح مقطع پله‌ای استفاده نموده است. او نشان داد که ادمین یک روش کارا و موثر برای تحلیل ارتعاشی تیرهای چند تکه با شرایط مرزی دلخواه ارائه می‌دهد.

نوگولسواران [۱۱] یک حل تقریبی برای ارتعاشات عرضی تیر یکنواخت اویلر-برنولی تحت نیروی محوری متغیر خطی ارائه نموده است.

شاکری و دهقان [۱۲] به منظور حل یک سیستم معادلات که شامل معادلات دیفرانسیلی و انتگرالی بوده که در بیولوژی دارای اهمیت بنیادین هستند از روش ادمین بهره جستند. معادلات ذکر شده مدل بیولوژیکی گونه‌های زنده را توصیف می‌کنند.

بی‌آزار و همکاران [۱۳]، یک نوع جدید از روش ادمین را معرفی کرده‌اند. آن‌ها یک روش کلی تکرار پذیر را به دست آورده‌اند که در آن نیازی به محاسبات چند جمله‌ای‌های ادمین نیست. آنان همچنین این روش نو را با روش سنتی جداسازی ادمین و روش تکرار متغیر مقایسه نموده‌اند.

برترین مزیت ادمین آن است که به هیچ گونه خطی‌سازی، گسسته‌سازی و سایر فرضیات محدود کننده نیازی ندارد؛ بنابراین واقعیت مسائل به دلیل خطی سازی دستخوش تغییر نمی‌گردد. همچنین حل مسئله تحت تاثیر خطاهای ناشی از گسسته سازی قرار نمی‌گیرد. همچنین بر خلاف روش پرتو برین، این روش به هیچ پارامتری وابستگی نداشته و جواب را به صورت یک سری نامحدود که به جواب دقیق همگرا می‌گردد، ارائه می‌دهد [۱۴].

۳- تئوری ارتعاش آزاد کابل

۳-۱- حل تحلیلی

یک کابل کشیده شده به طول l را در نظر بگیرید. برای این کابل یکنواخت که دارای کشش ثابت P بوده و تحت نیروی عرضی $f(x,t)$ قرار دارد معادله حرکت به صورت زیر می‌باشد:

$$P \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t) = \rho \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (۵)$$

برای $f(x,t)=0$ معادله ارتعاشات آزاد به صورت معادله (۶)

خواهد بود:

$$P \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (۶)$$

یا

$$c^2 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (۷)$$

که در آن

$$c = \left(\frac{P}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (۸)$$

بوده و ρ چگالی کابل می‌باشد.

معادله (۷) با استفاده از روش جداسازی متغیرها به صورت

معادلات (۹) و (۱۰) تفکیک می‌گردد:

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} y(x) = 0 \quad (۹)$$

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0 \quad (۱۰)$$

از حل این معادلات، معادلات (۱۱) و (۱۲) نتیجه می‌شوند:

$$y(x) = A \cos \frac{\omega x}{C} + B \sin \frac{\omega x}{C} \quad (۱۱)$$

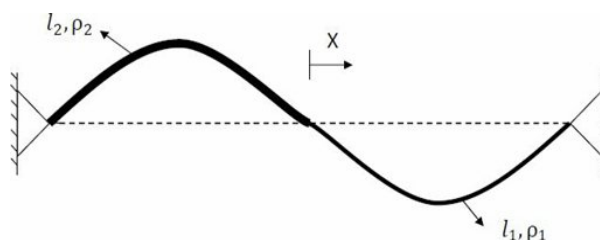
$$T(t) = C \cos \omega t + D \sin \omega t \quad (۱۲)$$

که در آن ω فرکانس ارتعاشات بوده و ثابت‌های A, B, C, D و

از شرایط مرزی و شرایط اولیه به دست می‌آیند.

۳-۲- فرمول‌بندی ارتعاشات کابل با استفاده از روش ADM:

یک کابل یکنواخت همانند شکل ۱ در نظر گرفته شده است. با استفاده از روش ADM، ابتدا کابل را به صورت دو تکه مجزا با طول برابر در نظر گرفته و مبداء دستگاه مختصات در نقطه میانی کابل قرار داده می‌شود.



شکل ۱- کابل دو تکه

شکل بدون بعد معادلات به صورت معادله (۱۳) خواهد بود:

$$\frac{d^2 Y_i(X_i)}{dX_i^2} - \lambda_i Y_i(X_i) = 0 \quad i=1,2 \quad (۱۳)$$

که در آن

$$\lambda_i = -\frac{\omega^2 P l_i^2}{\rho_i}, \quad X_i = \frac{x_i}{l_i}, \quad Y_i = \frac{y_i}{l_i} \quad i=1,2 \quad (۱۴)$$

می‌باشد.

برای معادله (۱۳)، اپراتورهای L و R به صورت معادله (۱۵)

تعریف می‌شوند:

$$L_i Y_i = \frac{d^2 Y_i(X_i)}{dX_i^2}, \quad R_i Y_i = -\lambda_i Y_i \quad i=1,2 \quad (۱۵)$$

اعمال ADM به معادله (۱۳) نتیجه می‌دهد:

$$\sum_{k=0}^{n-1} Y_{i,k}(X) = \phi_i + \lambda_i L_i \sum_{k=0}^{n-1} Y_{i,k}(X_i) \quad i=1,2 \quad (۱۶)$$

که $L_i^{-1} = \iint dX_i \quad i=1,2$ می‌باشد. همان‌گونه که ذکر

گردید مقدار ثابت که با ϕ نمایش داده می‌شود، به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$Y_{i,0}(X_i) = \phi_i = Y_i(0) + Y_i^{(1)} X_i \quad i=1,2 \quad (۱۷)$$

بنابراین رابطه بازگشتی به صورت معادله (۱۸) به دست می‌آید:

$$Y_{i,k}(X_i) = \lambda_i \int_0^{X_i} \int_0^{X_i} Y_{i,k-1}(X_i) dX_i dX_i \quad i=1,2 \quad (۱۸)$$

با جایگذاری معادله (۱۷) در معادله (۱۸) به عنوان اولین جمله و

بسط جملات دیگر، $Y_{i,k}(X_i)$ ، به صورت معادله (۱۹) ظاهر می‌-

گردد:

$$Y_{i,k}(X_i) = \lambda_i L_i^{-1} Y_{i,k-1}(X_i) = \lambda_i^k \sum_{m=0}^k \frac{X_i^{(2k+m)}}{(2k+m)!} Y_i^{(m)}(0) \quad i=1,2 \quad (۱۹)$$

پس از به دست آوردن روابط کلی هر یک از معادلات،

می‌تواند با معادله زیر تقریب زده شود:

$$Y_i(X_i) \approx \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_i^k \sum_{m=0}^k \frac{X_i^{(2k+m)}}{(2k+m)!} Y_i^{(m)}(0) \quad i=1,2 \quad (۲۰)$$

شرایط پیوستگی ایجاب می‌کند در نقطه میانی روابط زیر حاکم

باشند:

$$y_1(0) = y_2(0), \quad y_1^{(1)}(0) = y_2^{(1)}(0) \quad (۲۱)$$

با توجه به رابطه (۱۴)، بی‌بعد شده معادلات (۲۱) به صورت زیر

خواهد بود:

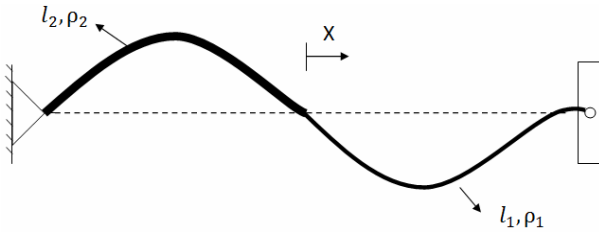
$$Y_2(0) = \frac{1}{\alpha} Y_1(0), \quad Y_2^{(1)}(0) = Y_1^{(1)}(0) \quad (۲۲)$$

که در آن $\alpha = \frac{l_2}{l_1}$ می‌باشد.

با جایگزینی (۲۲) در (۲۱) خواهیم داشت:

$$Y_1(X_1) \approx \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_1^k \sum_{m=0}^k \frac{X_1^{(2k+m)}}{(2k+m)!} Y_1^{(m)}(0) \quad i=1,2 \quad (۲۳)$$

$$Y_2(X_2) \approx \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_2^k \sum_{m=0}^k \alpha^{m-1} \frac{X_2^{(2k+m)}}{(2k+m)!} Y_1^{(m)}(0) \quad i=1,2 \quad (۲۴)$$



شکل ۶: کابل یک سر گیردار- یک سر آزاد استفاده شده در روش ادمین

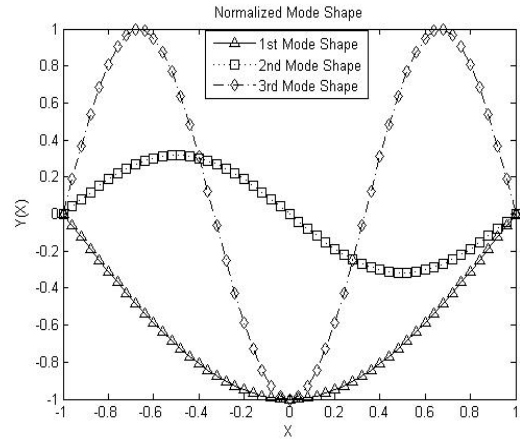
$Y_1^{(1)}$ با استفاده از مشتق گیری از معادله (۲۳) قابل محاسبه است. با اعمال معادله (۳۴) به معادلات (۲۳) و (۲۴)، شکل ماتریسی معادلات حاکم به صورت معادله (۳۵) قابل نمایش است.

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-\eta_1)^k \omega^{2k}}{(2k-1)!} & \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-\eta_1)^k \omega^{2k}}{(2k)!} \\ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-\eta_2)^k \omega^{2k}}{\alpha(2k)!} & -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-\eta_2)^k \omega^{2k}}{(2k+1)!} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1(0) \\ Y_1^{(1)}(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (35)$$

با در نظر گرفتن پارامترهای عددی مثال ۱، فرکانس‌های طبیعی و شکل مدهای مربوطه (سه شکل مد اول) به دست آمده و به ترتیب در جدول ۲ و شکل ۷ نمایش داده شده است.

جدول ۲: فرکانس‌های طبیعی یک کابل یک سر گیردار-یک سر آزاد

N	سر آزاد				
	1 ω	2 ω	3 ω	4 ω	5 ω
۲	۱/۲۹۷	۵۸/۱۹۲	۱۱۰	۱۵۴	۱۹۲۹
	۲۱				
۳	۱/۲۴۵	۶۴/۱۹۹	۱۱۱	۱۵۵	۱۹۹
	۲۲				
۷	۱/۲۱۴	۶۶/۶۴۳	۱۰۷۱	۱۵۲۹	۱۹۲۹
	۲۲				
۹	۱/۲۱۴	۶۶/۶۴۳	۱۰۷۲	۱۵۰۰	۱۹۲۹
	۲۲				
۱۵	۱/۲۱۴	۶۶/۶۴۳	۱۱۱	۱۵۵	۱۹۹
	۲۲				
مقدار					
ر	۱/۲۱۴	۱/۶۴۳	۱۱۱/۰۷۲	۱۵۰۰	۱۹۲۹
دقیق	۲۲	۶۶		۱۵۵	۱۹۹
ق					



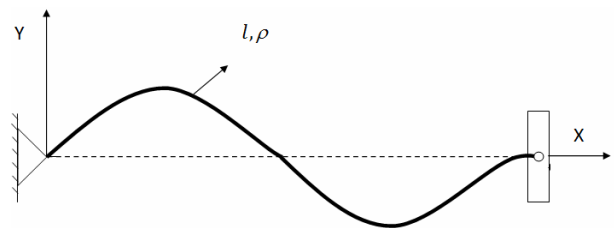
شکل ۴: شکل مد سه فرکانس اول برای کابل دو سر گیردار
۴-۲-۱- حل تحلیلی

مطابق شکل ۵، یک سر کابل در $x=0$ گیردار بوده و تغییر مکان آن صفر است. انتهای دیگر کابل به مفصلی که می‌تواند در راستای قائم حرکت نماید متصل شده است. این انتها نمی‌تواند نیروی عرضی را تحمل کند. بنابراین دو شرط مرزی عبارتند از:

$$w(0, t) = 0, \quad \frac{\partial w(l, t)}{\partial x} = 0 \quad (31)$$

و یا

$$y(0) = \frac{\partial y(l)}{\partial x} = 0 \quad (32)$$



شکل ۵: کابل یکنواخت یک سر گیردار- یک سر آزاد

با اعمال شرایط معادله (۳۲) به معادله (۱۱)، فرکانس‌های طبیعی سیستم به صورت معادله (۳۳) به دست می‌آید:

$$\omega_n = \frac{(2n+1)c\pi}{2l}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (33)$$

۴-۲-۲- حل با استفاده از روش ADM

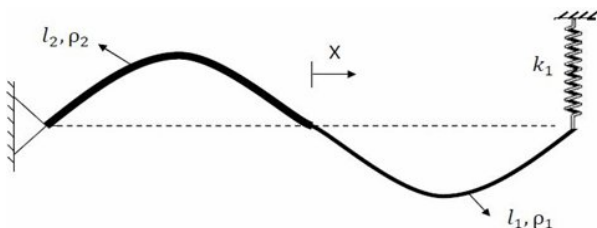
شرایط مرزی بدون بعد برای این حالت با توجه به شکل ۶ به صورت معادله (۳۴) می‌باشد:

$$Y_1^{(1)}(1) = 0, \quad Y_2(-1) = 0 \quad (34)$$

۴-۳-۲- حل با استفاده از روش ADM

با توجه به شکل ۹، شرایط مرزی بدون بعد این مساله به صورت زیر می باشد:

$$PY_1^{(1)}(1) = -KY_1(1) \quad , \quad Y_2(-1) = 0 \quad (۳۹)$$



شکل ۹: کابل یک سر گیردار-یک سر فنر استفاده شده در روش ادمین

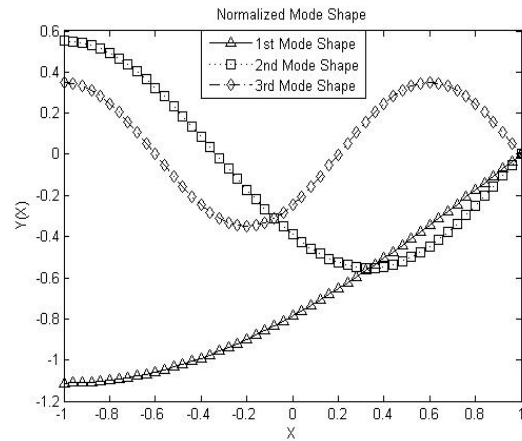
با جایگذاری معادله (۳۹) در معادلات (۲۳) و (۲۴)، شکل ماتریسی معادلات حاکم، به فرم معادله (۴۰) تبدیل می شود.

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-\eta_1)^k \omega^{2k}}{(2k-1)!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{K_1 (-\eta_1)^k \omega^{2k}}{(2k)!} & \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-\eta_1)^k \omega^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{K_1 (-\eta_1)^k \omega^{2k}}{(2k+1)!} \\ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-\eta_2)^k \omega^{2k}}{\alpha(2k)!} & -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-\eta_2)^k \omega^{2k}}{(2k+1)!} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1(0) \\ Y_1^{(1)}(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (۴۰)$$

با فرض پارامترهای عددی مثال ۱ و با در نظر گرفتن $K_1 = 16000 N/m$ ، پنج فرکانس طبیعی اول و شکل مدهای سه فرکانس اول به دست آمده و به ترتیب در جدول ۳ و شکل ۱۰ نمایش داده شده است.

جدول ۳: فرکانس های طبیعی کابل یک سر گیردار-یک سر فنر

N	فنر				
	1ω	2ω	3ω	4ω	5ω
۲	۱/۸۹۲	۶۴/۲۴۲	۳۵	۱۰۱۸	۱۶۴
	۳۵				
۴	۳۹/۶۴۲	۱/۳۴۱	۷۹	۱۰۳۹	۲۰۷
		۸۰			
۹	۳۹/۶۶۰	۱/۱۴۲	۱/۶۶۳	۱۰۳۹	۲۰۷
		۸۰	۱۲۱		
۱۴	۳۹/۶۶۰	۱/۱۴۲	۱/۶۶۵	۱۰۳۹	۲۰۷
		۸۰	۱۲۱		
۱۷	۳۹/۶۶۰	۱/۱۴۲	۱/۶۶۵	۱۰۳۹	۲۰۷
		۸۰	۱۲۱		
مقدار دقیق	-	-	-	-	-



شکل ۷: شکل مد سه فرکانس اول برای کابل یک سر گیردار-یک سر آزاد

۴-۳-۱- ارتعاشات آزاد یک کابل یک سر گیردار-یک سر فنر

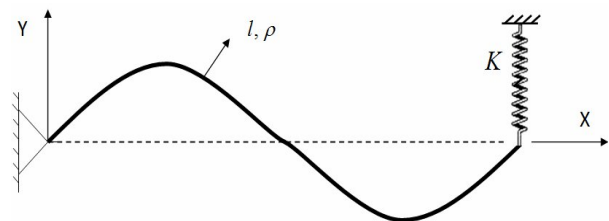
۴-۳-۱-۱- حل تحلیلی

مطابق شکل ۸، کابل در انتهای سمت چپ به یک مفصل ثابت و در انتهای سمت راست به یک فنر با ضریب سختی K متصل شده است. شرایط مرزی مطابق با معادلات (۳۶) و (۳۷) می باشد.

$$w(0, t) = 0 \quad , \quad P \frac{\partial w(l, t)}{\partial x} = -Kw(l, t) \quad (۳۶)$$

و یا

$$y(0) = 0 \quad , \quad P \frac{\partial y(l)}{\partial x} = -Ky(l) \quad (۳۷)$$



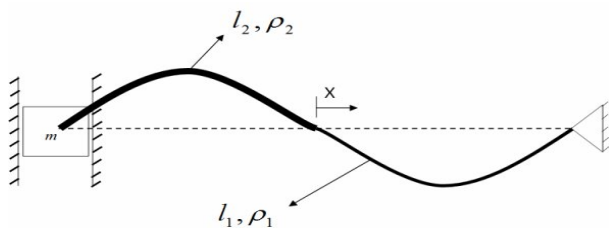
شکل ۸: کابل یک سر گیردار-یک سر فنر

در این حالت فرکانس های طبیعی سیستم از حل معادله (۳۸) قابل استحصال است.

$$\tan \frac{\omega l}{c} + \frac{P\omega}{Kc} = 0 \quad (۳۸)$$

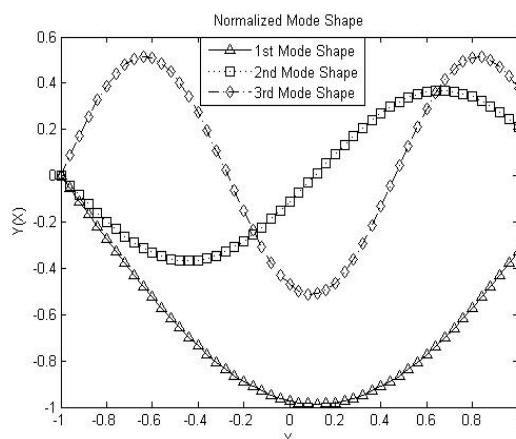
که در آن P ، کشش ثابت کابل، K ، ثابت فنر و $c = (\frac{P}{\rho})^{\frac{1}{2}}$ می باشد. همان گونه که مشخص است، معادله (۳۸) یک معادله غیر خطی بوده که به صورت صریح قابل حل نمی باشد و می بایست از روش های تقریبی مانند روش نیوتن برای حل آن استفاده نمود.

$$Y_1(l) = 0, \quad PY_2^{(1)}(-1) = -m\omega^2 Y_2(-1) \quad (44)$$



شکل ۱۲- کابل یک سر گیردار- یک سر جرم استفاده شده در روش ادمین

شکل ۱۰: شکل مد سه فرکانس اول برای کابل یک سر گیردار- یک سر فنر



شکل ۱۰: شکل مد سه فرکانس اول برای کابل یک سر گیردار- یک سر فنر

صحت نتایج به دست آمده از حل ADM، با صدق کردن فرکانس‌های طبیعی حاصله در معادله (۳۸) تایید می‌گردند.

۴-۴- ارتعاشات آزاد یک کابل یک سر گیردار- یک سر آزاد همراه جرم:

۴-۴-۱- حل تحلیلی

با توجه به شکل ۱۱، شرایط مرزی عبارتند از:

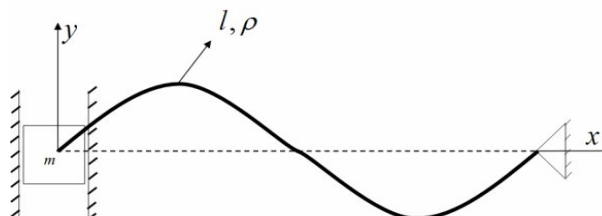
$$P \frac{\partial w}{\partial x}(0, t) = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(0, t), \quad w(l, 0) = 0 \quad (41)$$

و یا:

$$P \frac{dy}{dx}(0) = -m\omega^2 y(0), \quad y(l) = 0 \quad (42)$$

با اعمال شرایط معادله (۴۲) به (۱۱)، معادله فرکانس طبیعی سیستم به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\tan \frac{\omega l}{c} - \left[\frac{P}{mc\omega} \right] = 0 \quad (43)$$



شکل ۱۱: کابل یک سر گیردار- یک سر جرم

۴-۴-۲- حل با استفاده از روش ADM

شرایط مرزی بدون بعد با توجه به شکل ۱۲ عبارتند از:

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-\eta_1)^k \omega^{2k}}{(2k)!} & \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-\eta_2)^k \omega^{2k}}{(2k+1)!} \\ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-\eta_1)^k \omega^{2k}}{\alpha(2k-1)!} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M(-\eta_2)^k \omega^{2k+2}}{\alpha(2k)!} & \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-\eta_2)^k \omega^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M(-\eta_1)^k \omega^{2k+2}}{P(2k+1)!} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^*(0) \\ U_1^{(1)}(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (45)$$

با فرض $m = 10Kg$ و سایر پارامترهای در نظر گرفته شده در مثال اول، پنج فرکانس طبیعی اول محاسبه شده و در جدول ۴ نمایش داده شده است. شکل مد برای سه فرکانس اول در شکل ۱۳ نمایش داده شده است.

جدول ۴: فرکانس‌های طبیعی یک کابل یک سر گیردار- یک سر جرم

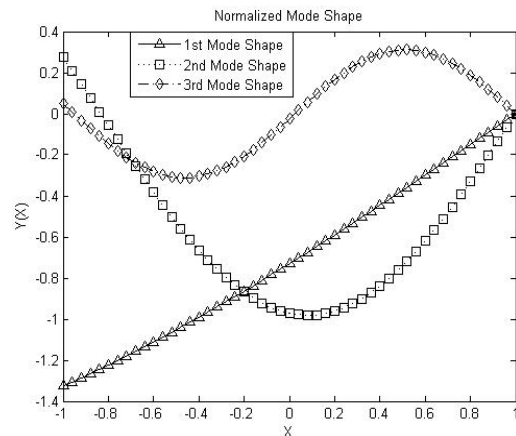
N	سر جرم				
	1ω	2ω	3ω	4ω	5ω
۲	۱۲/۱۶۷	۴۸/۹۲۸	۸۹/۵۱۰		
۵	۱۲/۱۶۶	۴۸/۴۴۵	۹۱/۰۲۷		
۸	۱۲/۱۶۶	۴۸/۴۴۵	۹۱/۰۳۷	۱۳۴/۷۵۹	۱۷۸/۵۳۹
۱۱	۱۲/۱۶۶	۴۸/۴۴۵	۹۱/۰۳۷	۱۳۴/۷۶۵	۱۷۸/۸۳۱
۱۵	۱۲/۱۶۶	۴۸/۴۴۵	۹۱/۰۳۷	۱۳۴/۷۶۵	۱۷۸/۸۳۱
مقدار دقیق	-	-	-	-	-

جدول ۵: فرکانس‌های طبیعی کابل دو سر فنر برای مقادیر

مختلف سختی فنر

Log(K)	ω_1^*	1ω	2ω	3ω	4ω	5ω
آزاد-	---	/۴۳	/۸۶	/۲۷	/۷۱	/۱۴
آزاد		۴۴	۸۸	۱۳۳	۱۷۷	۲۲۲
-۱	۰/۱۴	۰/۱۴	/۴۳	۸۸/۸۶	/۲۹	/۷۱
			۴۴		۱۳۳	۱۷۷
۰	۰/۴۵	۰/۴۵	/۴۳	۸۸/۸۶	/۲۹	/۷۲
			۴۴		۱۳۳	۱۷۷
۱	۱/۴۱	۱/۴۱	/۴۷	۸۸/۸۸	/۳۰	/۷۳
			۴۴		۱۳۳	۱۷۷
۲	۴/۴۷	۴/۴۵	/۸۷	۸۹/۰۸	/۴۴	/۸۳
			۴۴		۱۳۳	۱۷۷
۳	/۱۴	/۵۸	/۵۲	۹۱/۰۵	/۷۷	/۸۳
	۱۴	۱۳	۴۸		۱۳۴	۱۷۸
۴	/۷۲	/۳۱	/۳۳	/۵۵	/۰۴	/۹۰
	۴۴	۳۲	۶۷	۱۰۵	۱۴۶	۱۸۷
۵	/۴۲	/۷۲	/۴۶	/۲۱	/۰۰	/۸۴
	۱۴۱	۴۲	۸۵	۱۲۸	۱۷۱	۲۱۳
۶	/۲۱	/۲۵	/۵۰	/۷۵	/۰۱	/۲۶
	۴۴۷	۴۴	۸۸	۱۳۲	۱۷۷	۲۲۱
۷	۱۴۱۴	/۴۱	/۸۲	/۲۳	/۶۴	/۰۵
		۴۴	۸۸	۱۳۳	۱۷۷	۲۲۲
۸	۴۴۷۲	/۴۳	/۸۵	/۲۸	/۷۱	/۱۳
		۴۴	۸۸	۱۳۳	۱۷۷	۲۲۲
۹	۱۴۱۴	/۴۳	/۸۶	/۲۹	/۷۱	/۱۴
	۲	۴۴	۸۸	۱۳۳	۱۷۷	۲۲۲
گیردار						
-	---	/۴۳	/۸۶	/۲۹	/۷۱	/۱۴
گیردار		۴۴	۸۸	۱۳۳	۱۷۷	۲۲۲

همان‌گونه که از جدول ۵ مشخص می‌گردد، برای $K_{eq} < 10^3$ یا $\omega_1^* \leq 14$ می‌توان از رابطه (۴۶) برای تخمین میزان فرکانس طبیعی اول استفاده نمود. همچنین فرکانس‌های طبیعی دوم، سوم و ... به ترتیب، فرکانس‌های طبیعی اول، دوم و ... یک کابل دو سر آزاد می‌باشد که رابطه تحلیلی آن موجود است. همچنین برای مقادیر $K_{eq} > 10^5$ یا $\omega_1^* \geq 140$ می‌توان از شرط مرزی دو سر گیردار برای یافتن فرکانس‌های طبیعی سیستم استفاده نمود. نمودار شکل ۱۵، فرکانس طبیعی اول سیستم که به کمک روش ادمین به دست می‌آید و میزانی که رابطه تقریبی (۴۶) محاسبه می‌نماید را در مقیاس لگاریتمی بر حسب میزان سختی فنر نشان



شکل ۱۳: شکل مد سه فرکانس اول برای کابل یک سر

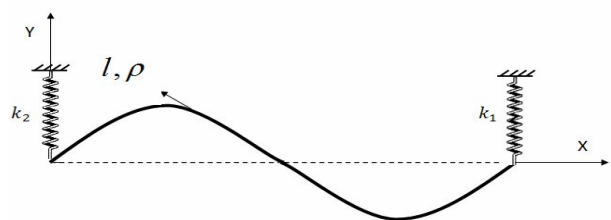
گیردار-یک سر جرم

۵- بررسی تاثیر مقدار جرم و سختی فنر بر میزان و نحوه تغییرات فرکانس‌های طبیعی

۵-۱- بررسی اثر سختی فنر

۵-۱-۱- کابل دو سر فنر:

یک کابل با شرط مرزی دو سر فنر مطابق شکل ۱۴ در نظر گرفته شده است. با فرض $K_1 = K_2 = K$ و برای مقادیر مختلف K ، مقادیر فرکانس‌های طبیعی مجموعه به دست آورده شده و در جدول ۵ نمایش داده شده‌اند. سایر پارامترها مشابه پارامترهای بخش ۴ در نظر گرفته شده‌اند.



شکل ۱۴: کابل با شرط مرزی دو سر فنر

در ستون دوم، فرکانس طبیعی اول طبق رابطه تقریبی

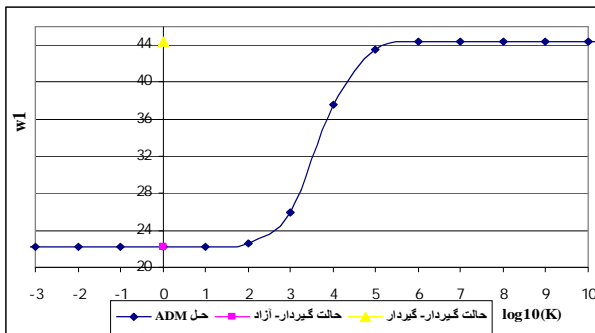
$$\omega_1^* = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m}} \quad (46)$$

محاسبه شده که در آن $K_{eq} = K_1 + K_2$ و m جرم کابل می‌باشد.

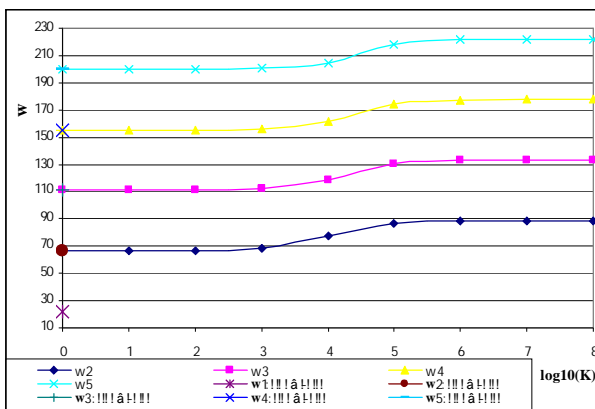
فرکانس‌های طبیعی دوم تا پنجم را بر حسب میزان سختی فنر نشان می‌دهد.

جدول ۶: فرکانس‌های طبیعی کابل یک سر فنر - یک سر گیردار برای مقادیر مختلف سختی فنر

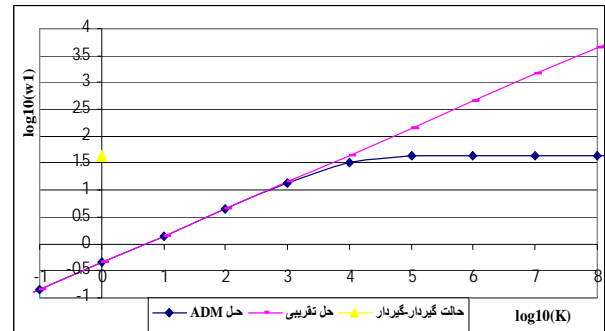
log(K)	1 ω	2 ω	3 ω	4 ω	5 ω
آزاد-گیردار	۲۲/۲۱	۶۶/۶۴	۱۱۱/۰۷	۱۵۵/۵۰	۱۹۹/۹۳
-۱	۲۲/۲۱	۶۶/۶۴	۱۱۱/۰۷	۱۵۵/۵۰	۱۹۹/۹۳
۰	۲۲/۲۲	۶۶/۶۴	۱۱۱/۰۷	۱۵۵/۵۰	۱۹۹/۹۳
۱	۲۲/۲۶	۶۶/۶۶	۱۱۱/۰۸	۱۵۵/۵۱	۱۹۹/۹۳
۲	۲۲/۶۶	۶۶/۸۰	۱۱۱/۱۶	۱۵۵/۵۶	۱۹۹/۹۳
۳	۲۵/۹۷	۶۸/۱۱	۱۱۱/۹۶	۱۵۶/۱۴	۲۰۰/۴۳
۴	۳۷/۵۳	۷۷/۱۴	۱۱۸/۶۷	۱۶۱/۳۴	۲۰۴/۶۳
۵	۴۳/۵۶	۸۷/۱۲	۱۳۰/۷۰	۱۷۴/۳۰	۲۱۷/۹۲
۶	۴۴/۳۴	۸۸/۶۸	۱۳۳/۰۲	۱۷۷/۳۶	۲۲۱/۷۰
۷	۴۴/۴۲	۸۸/۸۴	۱۳۳/۲۶	۱۷۷/۶۸	۲۲۲/۰۱
۸	۴۴/۴۳	۸۸/۸۶	۱۳۳/۲۸	۱۷۷/۷۱	۲۲۲/۱۴
گیردار-گیردار	۴۴/۴۳	۸۸/۸۶	۱۳۳/۲۹	۱۷۷/۷۱	۲۲۲/۱۴



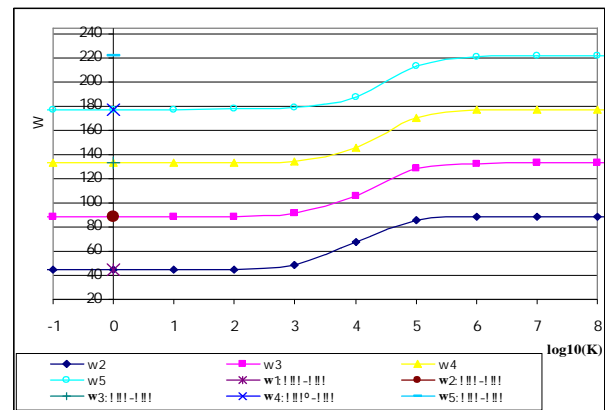
شکل ۱۷: نحوه تغییرات فرکانس طبیعی اول بر حسب میزان سختی فنر برای کابل یک سر فنر - یک سر گیردار



می‌دهد. شکل ۱۶، نحوه تغییرات فرکانس‌های طبیعی دوم تا پنجم را بر حسب تغییرات سختی فنر نمایش می‌دهد.



شکل ۱۵: مقایسه فرکانس طبیعی اول محاسبه شده توسط رابطه تقریبی (۴۶) و روش ادمین بر حسب میزان سختی فنر برای کابل دو سر فنر



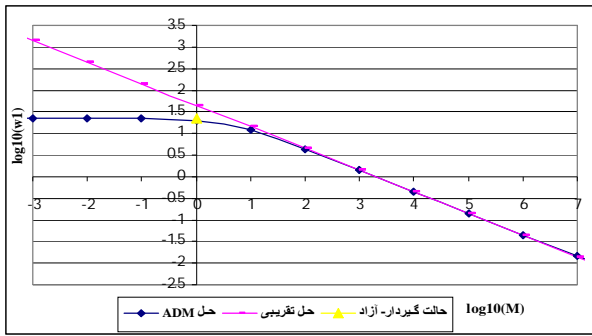
شکل ۱۶: نحوه تغییرات فرکانس‌های طبیعی دوم تا پنجم بر حسب میزان سختی فنر برای کابل دو سر فنر

۵-۱-۲- کابل یک سر فنر - یک سر گیردار:

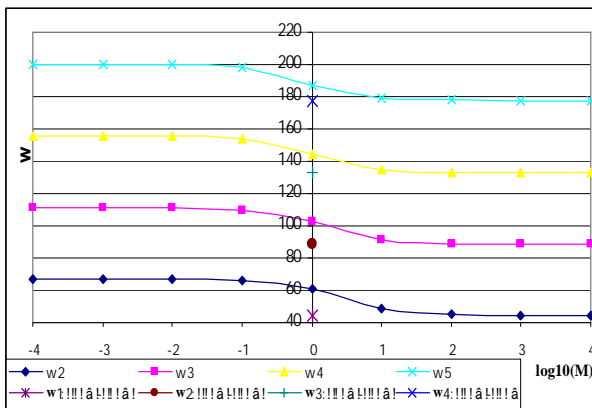
مطابق بخش قبل، برای مقادیر مختلف سختی فنر، مقادیر فرکانس‌های طبیعی مجموعه به دست آورده شده و در جدول ۶ نمایش داده شده‌اند. سایر پارامترها مشابه پارامترهای بخش ۴ در نظر گرفته شده‌اند. در ستون دوم، فرکانس طبیعی اول طبق رابطه (۴۶) محاسبه شده و نمایش داده شده است.

همان‌گونه که از جدول ۶ مشخص می‌باشد، برای مقادیر $K < 10^3$ یا $\omega_1^* \leq 10$ ، می‌توان فرکانس‌های طبیعی مجموعه را برابر فرکانس‌های طبیعی یک کابل گیردار-آزاد در نظر گرفت که حل دقیق آن موجود می‌باشد. همچنین برای $K > 10^5$ یا $\omega_1^* \geq 100$ ، فرکانس‌های طبیعی مجموعه تقریباً برابر با فرکانس‌های طبیعی یک کابل دو سر گیردار خواهد بود. شکل ۱۷، نحوه تغییرات فرکانس طبیعی اول سیستم و شکل ۱۸، نحوه تغییرات

شکل ۱۸: نحوه تغییرات فرکانس‌های طبیعی دوم تا پنجم بر حسب میزان سختی فنر برای کابل یک سر فنر - یک سر گیردار



شکل ۱۹: مقایسه فرکانس طبیعی اول محاسبه شده توسط رابطه تقریبی (۴۶) و روش ادمین بر حسب میزان جرم برای کابل یک سر گیردار - یک سر جرم



شکل ۲۰: نحوه تغییرات فرکانس‌های طبیعی دوم تا پنجم بر حسب میزان جرم برای کابل یک سر گیردار - یک سر جرم

۶- نتایج

همان‌گونه که از تحلیل مثال‌های بخش ۴ مشخص گردید، با افزایش جملات سری جواب روش ادمین، حل حاصل به سرعت به جواب دقیق همگرا می‌گردد. با افزایش جملات سری به میزان مورد نیاز، هر کدام از فرکانس‌های بالاتر با شکل مد مربوطه نیز قابل استحصال می‌باشد. همچنین در تحلیل بخش ۵ مشخص شد که برای گستره بزرگی از مقادیر جرم یا سختی فنر در شرایط مرزی، می‌توان به جای جرم یا فنر، آن‌ها را گیردار یا آزاد در نظر گرفت. همچنین رابطه ساده تقریبی (۴۶) در اکثر مواقع، تخمین درستی از میزان فرکانس طبیعی اول به دست خواهد داد. به عنوان مثال، در کابل با شرط مرزی دو سر فنر، برای $\omega_1^* \leq 14$ ، می‌توان از رابطه (۴۶) برای یافتن میزان فرکانس طبیعی اول استفاده نمود. همچنین فرکانس‌های طبیعی دوم، سوم و ... به ترتیب، فرکانس‌های طبیعی اول، دوم و ... یک کابل دو سر آزاد می‌باشد که رابطه تحلیلی آن موجود است.

۲-۵- بررسی اثر جرم:

۱-۲-۵- کابل یک سر گیردار-یک سر جرم:

یک کابل با شرط مرزی یک سر گیردار-یک سر جرم مطابق شکل ۱۱ در نظر گرفته شده است. برای مقادیر مختلف جرم، فرکانس‌های طبیعی مجموعه به دست آورده شده و در جدول ۷ نمایش داده شده‌اند. در ستون دوم، فرکانس طبیعی اول طبق رابطه (۴۶) محاسبه شده که در آن $K_{eq} = \frac{P}{l}$ در نظر گرفته شده است.

همان‌گونه که از جدول ۷ مشخص می‌باشد، برای $m > 10^1$ یا $\omega_1^* \leq 14$ ، به منظور یافتن فرکانس طبیعی اول مجموعه می‌توان از رابطه تقریبی (۴۶) استفاده نمود. همچنین می‌توان فرکانس‌های طبیعی دوم، سوم و ... مجموعه را به ترتیب، با فرکانس‌های طبیعی اول، دوم و ... یک کابل دو سر گیردار تخمین زد. همچنین برای $m < 1$ یا $\omega_1^* \geq 44$ ، فرکانس‌های طبیعی سیستم تقریباً برابر فرکانس‌های طبیعی یک کابل گیردار-آزاد می‌باشد.

شکل ۱۹، فرکانس طبیعی اول سیستم که به کمک روش ادمین به دست می‌آید و میزانی که رابطه تقریبی (۴۶) محاسبه می‌نماید را در مقیاس لگاریتمی بر حسب میزان جرم نشان می‌دهد. نحوه تغییرات فرکانس‌های طبیعی دوم تا پنجم بر حسب مقدار جرم در شکل ۲۰ نمایش داده شده است.

جدول ۷: فرکانس‌های طبیعی کابل یک سر گیردار - یک سر جرم برای مقادیر مختلف جرم

Log(M)	ω_1^*	1ω	2ω	3ω	4ω	5ω
آزاد-گیردار	---	۲۲/۲۱	۶۶/۶۴	۱۱/۰۷	۱۵۵/۵۰	۱۹۹/۹۳
-۴	۴۴۷۲	۲۲/۲۱	۶۶/۶۴	۱۱۱/۰۷	۱۵۵/۵۰	۱۹۹/۹۳
-۳	۱۴۱۴	۲۲/۲۱	۶۶/۶۴	۱۱۱/۰۶	۱۵۵/۴۸	۱۹۹/۹۱
-۲	۴۴۷/۱	۲۲/۱۹	۶۶/۵۸	۱۱۰/۹۶	۱۵۵/۳۴	۱۹۹/۷۳
-۱	۱۴۱/۴	۲۱/۹۹	۶۵/۹۸	۱۰۹/۹۷	۱۵۳/۹۷	۱۹۷/۹۶
۰	۴۴/۷۲	۲۰/۲۱	۶۰/۸۹	۱۰۲/۲۲	۱۴۴/۲۵	۱۸۶/۸۸
۱	۱۴/۱۴	۱۲/۱۷	۴۸/۴۴	۹۱/۰۴	۱۳۴/۷۶	۱۷۸/۸۳
۲	۴/۴۷۲	۴/۴۰	۴۴/۸۷	۸۹/۰۸	۱۳۳/۴۴	۱۷۷/۸۳
۳	۱/۴۱۴	۱/۴۱	۴۴/۴۷	۸۸/۸۸	۱۳۳/۳۰	۱۷۷/۷۳
۴	۰/۴۴۷	۰/۴۵	۴۴/۴۳	۸۸/۸۶	۱۳۳/۲۹	۱۷۷/۷۲
۵	۰/۱۴۱	۰/۱۴۱	۴۴/۴۳	۸۸/۸۶	۱۳۳/۲۹	۱۷۷/۷۱
گیردار-گیردار	---	۴۴/۴۳	۸۸/۸۶	۱۳۳/۲۹	۱۷۷/۷۱	۲۲۲/۱۴

۸- علایم و نشانه‌ها

C	ثابت انتشار موج ($L^{-2}T^{-2}$)
K	ثابت فنر (KG^{-2})
m	جرم (KG)
ρ	چگالی خطی (KG^{-1})
L	طول (L)
ω	فرکانس (T^{-1})
p	نیرو (KG^{-2})

۹- منابع

- [1] R. Hirota, The direct method in soliton theory, Cambridge Univ Pr 2004.
- [2] Olver P. J., "Applications of Lie groups to differential equations" Springer Verlag; vol.107, 2000.
- [3] Yildirim A.; "Application of He's homotopy perturbation method for solving the Cauchy reaction-diffusion problem" Computers & Mathematics with Applications; vol.57, 2009, pp612-618.
- [4] Abassy T.A., El-Tawil M.A., El Zoheiry H.; "Toward a modified variational iteration method" Journal of Computational and Applied Mathematics; vol. 207, 2007, pp137-147.
- [5] Adomian G., Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method [ie Method], Boston, Kluwer Academic Publishers 1994.
- [6] Öziş T., Yıldırım A.; "Comparison between Adomian's method and He's homotopy perturbation method" Computers & Mathematics with Applications; vol.56, 2008, pp1216-1224.
- [7] Abassy T.A., El-Tawil M.A., El Zoheiry H.; "The solution of KdV and mKdV equations using adomian pade approximation" International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation; vol.5, 2011, pp327-340.
- [8] Hsu J.C., Lai H.Y., Chen C.K.; "Free vibration of non-uniform Euler-Bernoulli beams with general elastically end constraints using Adomian modified decomposition method" Journal of Sound and Vibration; vol.318, 2008, pp965-981.
- [9] Mao Q, Pietrzko S.; "Free vibration analysis of stepped beams by using Adomian decomposition method"

همچنین برای $\omega_1^* \geq 140$ ، می‌توان از شرط مرزی دو سرگیردار برای یافتن فرکانس‌های طبیعی سیستم استفاده نمود.

در حالت کابل یک سر فنر- یک سر گیردار، برای مقادیر $\omega_1^* \leq 10$ ، می‌توان فرکانس‌های طبیعی مجموعه را برابر فرکانس‌های طبیعی یک کابل گیردار- آزاد در نظر گرفت که حل دقیق آن موجود می‌باشد. همچنین برای $\omega_1^* \geq 100$ ، فرکانس‌های طبیعی مجموعه تقریباً برابر با فرکانس‌های طبیعی یک کابل دو سر گیردار خواهد بود.

در حالت کابل یک سر گیردار- یک سر جرم، برای $\omega_1^* \leq 14$ ، به منظور یافتن فرکانس طبیعی اول مجموعه می‌توان از رابطه (۴۶) استفاده نمود. همچنین می‌توان فرکانس‌های طبیعی دوم، سوم و... مجموعه را به ترتیب، با فرکانس‌های طبیعی اول، دوم و ... یک کابل دو سر گیردار تخمین زد. همچنین برای $\omega_1^* \geq 44$ ، فرکانس‌های طبیعی سیستم تقریباً برابر فرکانس‌های طبیعی یک کابل گیردار- آزاد می‌باشد.

۷- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

این مقاله، یک روش موثر در تحلیل ارتعاشی کابل‌ها با شرایط مرزی مختلف را ارائه می‌دهد. یک کابل با دو شرط مرزی مختلف توسط روش ADM تحلیل گردید. با استفاده از این روش، معادلات دیفرانسیلی حاکم، به یک معادله بازگشت پذیر تبدیل شده و شرایط مرزی، تبدیل به معادلات ساده جبری می‌شوند که برای محاسبات پارامتریک مناسب می‌باشند. هر کدام از فرکانس‌های طبیعی همراه با شکل مد مربوط به آن به صورت هم‌زمان با انجام چند عمل ساده جبری به دست می‌آید. با در نظر گرفتن جملات بیش‌تری از سری جواب، فرکانس‌های طبیعی بیش‌تری به همراه شکل مدهای مربوطه و با دقت بالاتر حاصل می‌گردد.

مثال‌های متنوعی با شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار گرفت و نشان داده شد که روش ادمین با دقت بالایی به جواب‌های دقیق همگرا می‌گردد. هر چند در برخی موارد حل صریح معادلات تحلیلی میسر نبود، صدق کردن پاسخ منتج شده از ادمین در این معادلات، درستی نتایج را تایید نمود.

حجم محاسبات کم و هم‌گرایی سریع این روش در مقایسه با روش‌های عددی، نشان از کارایی این روش در تحلیل ارتعاشی اجزا مختلف است. همچنین مشخص گردید در صورتی که میزان جرم و یا سختی فنری که به عنوان شرایط مرزی در نظر گرفته شده‌اند از یک مقدار معین کم‌تر یا بیش‌تر باشند می‌توان با دقت بالایی به جای آن‌ها، از شرط مرزی آزاد یا گیردار استفاده نمود. از این روش می‌توان در تحلیل ارتعاشی سایر اجزا از جمله شفت‌های انتقال قدرت و همچنین تیرها نیز بهره جست.

- Applied Mathematics and Computation; vol.217, 2010, pp3429-3441.
- Mao Q.; "Free vibration analysis of multiple-stepped beams by using Adomian decomposition method" [10] Mathematical and computer modelling; vol.54, 2011, pp756-764.
- Naguleswaran S.; "Transverse vibration of an uniform Euler–Bernoulli beam under linearly varying axial force" [11] Journal of Sound and Vibration; vol.275, 2004, pp47-57.
- Shakeri F., Dehghan M.; "Solution of a model describing biological species living together using the variational iteration method" [12] Mathematical and computer modelling; vol.48, 2008, pp685-699.
- Biazar J., Gholami Porshokuhi M., Ghanbari B.; "Extracting a general iterative method from an Adomian decomposition method and comparing it to the variational iteration method" [13] Computers & Mathematics with Applications; vol.59, 2010, pp622-628.
- Wazwaz A. M., "Analytic treatment for variable coefficient fourth-order parabolic partial differential equations" [14] Applied Mathematics and Computation, vol.123, 2001, pp219-227,.
- El-Sayed S. M., Kaya D.; "On the numerical solution of the system of two-dimensional Burgers' equations by the decomposition method" [15] Applied Mathematics and Computation; vol.158, 2004; pp101-109.