

محاسبه انرژی کازمیر برای میدان اسکالر روی یک سطح کروی S^3

مددعلی ولوییان*

استادیار، گروه علوم پایه (فیزیک)، واحد سمنان، دانشگاه آزاد اسلامی، سمنان، ایران

* سمنان، صندوق پستی ۱۷۹ - ۳۵۱۴۵، m-valuyan@sbu.ac.ir

چکیده

در این مقاله انرژی کازمیر مربوط به میدان اسکالر جرم دار و بدون جرم روی یک سطح کروی با توپولوژی S^3 و با استفاده از روش منظم سازی کم کردن جعبه ها محاسبه شده است. این انرژی در دیگر مقالات گذشته با کم کردن انرژی نقطه صفر فضای مینکوفسکی از انرژی نقطه صفر فضای مورد نظر محاسبه شده است اما در این مقاله انرژی دو ساختار مشابه با یکدیگر مقایسه و در نهایت از هم کم خواهند شد. در واقع آنچه در این مقاله بر آن تاکید گردیده است استفاده از روش منظم سازی جعبه ها در انجام محاسبات کازمیر است. این روش بصورت خودبخودی منجر به حذف واگرایی های موجود در فرایند محاسبات خواهد شد. مقایسه پاسخهای بدست آمده در این مقاله با آنچه در گذشته بدست آمده است نشان می دهد که سازگاری مناسب و منطقی بین جوابها وجود دارد.

کلیدواژگان

انرژی کازمیر، کم کردن جعبه ها، فضای خمیده، ارتعاشات خلأ، فرکانس

Casimir Energy Calculation for Scalar Field on a Spherical Surface with S^3 Topology

Madad Ali Valuyan*

Department of Mechanical Engineering, Semnan Branch, Islamic Azad University, Semnan, Iran

* P.O.B. 35145-179, Semnan, Iran, m-valuyan@sbu.ac.ir

Abstract:

In this article we investigate the Casimir energy for massive and massless scalar field on 3- sphere with S^3 topology by Box Subtraction Scheme (BSS). This method spontaneously eliminate divergences that is appeared in the Casimir energy calculation process. Usually, in the BSS to remove divergences from zero point energy expressions, two comparable configurations are designed and then the zero point energies of these two configurations are subtracted from each other. This setup for configurations made us an ability to divide divergences clearly and it would be to show all divergences are removed without resorting to any other techniques such as analytic continuation techniques. In final we compare our results with those reported in the literature, which are obtained from other regularization techniques.

Keywords:

Casimir Energy, Box Subtraction Scheme, Curved Space, Vacuum Polarization, Frequency

۱- مقدمه

پدیدار گشته است. این اثر، نقش مهمی در حوزه های متعدد فیزیک، نظیر QFT^۵ [۵-۴] فیزیک ماده چگال [۶-۹]، فیزیک اتمی-ملکولی، گرانش، کیهان-شناسی [۱۰-۱۱] و ریاضی فیزیک [۱۲] ایفا می کند. بررسی اثرات کوانتومی روی جهان شامه ها^۶ یکی از موارد جالب اثرات پدیده شناختی اثر کازمیر به شمار می رود.

محاسبه انرژی کازمیر همیشه مستلزم کم کردن دو عبارت بینهایت از یکدیگر است که این امر همیشه نیاز به استفاده از روشهای متفاوت منظم سازی و یا بازبهنجارش^۷ می باشد [۱۳]. روشهای متفاوتی که برای محاسبه انرژی کازمیر اعم از منظم سازی و بازبهنجارش طراحی شده است، بسته به نوع مساله و چگونگی واگرایی های موجود در مساله هریک از این بازبهنجارش ها و یا منظم سازی ها اهمیت فوق العاده ای پیدا خواهد کرد. این امر خود بهانه ای برای تدوین روشها و تکنیکهای متفاوت منظم سازی^۸ در جهت حذف واگرایی ها گردید و به سرعت تکنیک های بسیار زیادی در این راستا معرفی شده است که

انرژی کازمیر از اختلاف بین دو انرژی خلأ^۱ در صورت حضور شرط مرزی غیر بدیهی^۲ و عدم حضور شرط مرزی حاصل می شود. بیش از ۶۰ سال پیش این اثر توسط هندریک کازمیر^۳ پیش بینی و محاسبه گردید. او برای اولین بار در مقاله معروف خود میزان جاذبه بین دو صفحه رسانا بدون بار موازی را که در خلأ هستند برای قطبش های میدان الکترومغناطیس توضیح داد [۱-۲]. با محاسبه گرادیان انرژی کازمیر نسبت به ابعاد شرایط مرزی و یا ساختار موجود می توان نیروی کازمیر وارد بر آن ساختار را بدست آورد. اولین تلاش برای اندازه گیری این پدیده و یافتن یک شاهد معتبر در آزمایشگاه برای این اثر نیز تقریباً ده سال بعد توسط اسپارنای^۴ در سال ۱۹۵۸ انجام پذیرفت [۳] و بعدها نیز اندازه گیری های دقیقتری بر درستی پیش بینی کازمیر صحه گذاشتند.

با توجه به اینکه اثر کازمیر بعدها به عنوان اثر منحصر به فرد و بسیار جالب از قطبش (ارتعاشات) خلأ شناخته شد لذا جوانب و کاربرد های فراوانی برای آن

5. Quantum Field Theory
6. Braneworld
7. Renormalization
8. Regularization techniques

1 Zero point energy
2. Non-trivial boundary condition
3 H.B.G. Casimir
4. M. J. Sparnaay

که در آن $g(\eta)$ پاسخ معادله زیر است:

$$g''_{\lambda}(\eta) + \omega_{\lambda}^2(\eta)g_{\lambda}(\eta) = 0 \quad (6)$$

که فرکانسهای مجاز ω_{λ} نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$\omega_{\lambda}(\eta) = \left[\frac{m^2 c^2 a^2(\eta)}{\hbar^2} + \lambda^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \lambda = 1, 2, 3, \dots \quad \ell = 0, 1, 2, \dots, \lambda - 1, \quad M = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \ell \quad (7)$$

پس از طی شدن مراحل محاسباتی مربوط به کوانتس دوم^۱ و به دست آوردن میدان اسکالر روی کره برحسب بسطی از توابع متعامد بدست آمده در رابطه (۴) و محاسبه مقدار انتظاری تانسور انرژی-تکانه در خلا، انرژی نقطه صفر خلا به صورت زیر بدست می آید:

$$E^{(0)} = \langle 0|T_{00}(x)|0\rangle = \frac{\hbar c}{4\pi^2 a^4(\eta)} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda^2 \omega_{\lambda}(\eta) [2S_{\lambda}(\eta) + 1] \quad (8)$$

که در آن $S_{\lambda}(\eta)$ به صورت زیر و بر حسب تابع $g_{\lambda}(\eta)$ بدست می آید:

$$S_{\lambda}(\eta) = \frac{1}{4\omega_{\lambda}(\eta)} [|g'_{\lambda}|^2 + \omega_{\lambda}^2 |g_{\lambda}|^2 - 2\omega_{\lambda}] \quad (9)$$

کلیه فرکانسهای مجاز بدست آمده از رابطه (۷) می باشد. نکته ای که اشاره به آن ضروری است این است که برای یک جهان استاتیک می توان نشان داد که به ازای هر η تابع $S_{\lambda}(\eta)$ برابر صفر خواهد بود. بنابراین رابطه (۸) بصورت زیر ساده خواهد شد:

$$E^{(0)} = \frac{\hbar c}{4\pi^2 a^4(\eta)} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda^2 \omega_{\lambda}(\eta) \quad (10)$$

همانطور که از عبارت (۱۰) نیز مشخص است چگالی انرژی نقطه صفر بدست آمده یک عبارت واگرا^{۱۱} بوده و لازم است برای بدست آوردن انرژی کازمیر از یک روش منظم سازی استفاده گردد. روش منظم سازی انتخاب شده در این مقاله منظم سازی به روش کم کردن جعبه ها می باشد که به تفصیل در بخش بعد در خصوص آن بحث کافی صورت می پذیرد.



Configuration A

Configuration B

شکل ۱ در این شکل چگونگی در نظر گرفتن ساختارها در روش کم کردن جعبه ها نمایش داده شده است. ساختار سمت راست را ساختار B و ساختار سمت چپ را ساختار A گوئیم.

۳- انرژی کازمیر

برای پیاده سازی روش منظم سازی جعبه در این مساله همانند شکل (۱) دو ساختار مجزا را در نظر می گیریم. در شکل (۱) به ساختار سمت چپ ساختار A و به ساختار سمت راست ساختار B گوئیم. با پیاده سازی روش کم کردن جعبه ها می توان تعریف انرژی کازمیر را به صورت زیر نوشت: [۲۲]

از آن جمله می توان به تکنیک منظم سازی تابع زتا^۱ [۱۴، ۱۵]، منظم سازی تابع گرین^۲ [۱۶]، منظم سازی بسط چند جمله ای پراکندگی [۱۷]، منظم سازی کم کردن جعبه ها^۳ [۱۸] و... اشاره نمود. در خصوص هریک از این منظم سازی ها و مزیت ها و یا معایب احتمالی آنها در کتب و مقالات گذشته مطالب فراوانی یافت می شود [۱۹-۲۱] که با توجه به اینکه در مقاله [۲۲] به تفصیل در این خصوص ذکر گردیده است از تکرار این توضیحات در این مقاله خودداری خواهیم کرد. در بخش بعد فرض می کنیم کره ای به شعاع $a(\eta)$ در اختیار داریم که میدان اسکالر با جرم m روی این کره تعریف شده است. با استفاده از حل معادله حرکت میدان اسکالر مورد نظر مساله استخراج می گردد و با توجه به روش لاگرانژ - همیلتونی تانسور انرژی-تکانه^۴ مربوط به این میدان نیز نوشته شده و در نهایت می توان با ساندویچ کردن تانسور مذکور بین حالتیهای خلا انرژی نقطه صفر میدان را محاسبه نمود. در ادامه نیز با استفاده از روش کم کردن جعبه ها و با در نظر گرفتن ساختارهای مشابه سعی در حذف واگرایی ها و استخراج مقدار انرژی کازمیر خواهیم داشت. در بخش بعد پس از بدست آوردن انرژی کازمیر برای میدان جرم دار مساله را برای حالتیهای خاصی چون میدان بدون جرم و یا میدانی با جرم سنگین نیز محاسبه خواهیم کرد و در نهایت نیز نتایج حاصله را با نتایج انرژی کازمیر که در گذشته بدست آمده است مقایسه خواهد شد.

۲- محاسبه انرژی نقطه صفر

در ابتدا لازم است رویه ای که میدان اسکالر بر روی آن تعریف شده است را مشخص کنیم. لذا برای منیفولد^۵ خود ژئودزی(متریک) زیر را می نویسیم. این متریک رویه ی یک کره به شعاع a را توصیف می کند:

$$ds^2 = a(\eta)^2 d\eta^2 - a(\eta)^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] \quad (1)$$

که در آن $a(\eta)$ ضریب اندازه^۶ کره می باشد. همانطور که می دانیم معادله موج برای میدان اسکالر با جرم m روی یک فضای خمیده $(3+1)$ بعدی را می توان به صورت زیر نوشت: [۲۴، ۲۳]

$$\varphi''(x) + 2 \frac{a'(x)}{a(x)} \varphi'(x) - \Delta^{(3)} \varphi(x) + \left(1 + \frac{m^2 c^2 a^2}{\hbar^2} + \frac{a''(x)}{a(x)} \right) \varphi(x) = 0 \quad (3)$$

که در آن $\Delta^{(3)}$ قسمت زاویه ای لاپلاسیان کروی برای یک سطح سه بعدی است. مجموعه جواب های متعامد و یکه زیر را می توان به عنوان حل معادله دیفرانسیل فوق بدست آورد:

$$\varphi_{\lambda\ell M}^{(+)}(\eta, \chi, \theta, \varphi) = \frac{1}{a(\eta) \sqrt{2 \sin \chi}} \sqrt{\frac{\lambda(\lambda+1)!}{(\lambda-\ell+1)!}} g(\eta) P_{\lambda-\frac{1}{2}}^{-\ell-\frac{1}{2}}(\cos \chi) Y_{\ell M}(\theta, \varphi) \quad (4)$$

که در آن $Y_{\ell M}(\theta, \varphi)$ تابع هماهنگ های کروی^۸ می باشد. همچنین برای پاسخ الحاقی مختلط^۹ داریم:

$$\varphi_{\lambda\ell M}^{(-)}(\eta, \chi, \theta, \varphi) = \left(\varphi_{\lambda\ell M}^{(+)}(\eta, \chi, \theta, \varphi) \right)^* \quad (5)$$

1. Zeta function regularization
2. Green's function regularization
3. Box subtraction scheme
4. Energy-Momentum Tensor
5. Manifold
6. Metric
7. Scale factor
8. Spherical harmonics Function
9. Complex Conjugate solution

10. Second quantization
11. Divergent

$$\begin{aligned} & \frac{f(it) - f(-it)}{e^{2\pi t} - 1} \\ &= \frac{(it)^2 \left[\frac{m^2 c^2 a^2(\eta)}{h^2} + e^{i\pi t} t^2 \right]^{\frac{1}{2}} - (-it)^2 \left[\frac{m^2 c^2 a^2(\eta)}{h^2} + e^{-i\pi t} t^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{e^{2\pi t} - 1} \\ &= \frac{-2it^2 \left[t^2 - \frac{m^2 c^2 a^2(\eta)}{h^2} \right]^{\frac{1}{2}}}{e^{2\pi t} - 1} \quad t \geq \mu \left(= \frac{mca(\eta)}{h} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

با استفاده از عبارت بدست آمده در رابطه (15) برای جمله برنچکات ساختار A داریم:

$$B(a) = 2 \int_{\mu}^{\infty} \frac{t^2 \left[t^2 - \frac{m^2 c^2 a^2(\eta)}{h^2} \right]^{\frac{1}{2}}}{e^{2\pi t} - 1} dt \quad (16)$$

متأسفانه انتگرال فوق به صورت تحلیلی قابل محاسبه نبوده و دارای فرم بسته نمی‌باشد لذا برای محاسبه آن مخرج کسر را با استفاده از رابطه زیر را به صورت یک عبارت جمع می‌نویسیم:

$$\frac{1}{e^{2\pi t} - 1} = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-2\pi t j} \quad (17)$$

با توجه به رابطه (17) و همچنین با استفاده از تغییر متغیر $t = \mu z$ برای انتگرال (16) داریم:

$$\begin{aligned} B(a) &= 2\mu^4 \int_1^{\infty} \frac{z^2 [z^2 - 1]^{\frac{1}{2}}}{e^{2\pi \mu z} - 1} dz = 2\mu^4 \sum_{j=1}^{\infty} \int_1^{\infty} z^2 [z^2 - 1]^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi \mu z j} dz \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu^2}{2\pi^2 j^2} [2\pi \mu j K_1(2\pi \mu j) + 3K_2(2\pi \mu j)] \end{aligned} \quad (18)$$

با جایگذاری b بجای a در رابطه (18) می‌توان بخش برنچکات مربوط به ساختار B را ایجاد نمود. با جایگذاری جملات برنچکات بدست آمده و استفاده از رابطه (11) داریم:

$$E_{Cas.} = \lim_{b/a \rightarrow \infty} \left[\frac{\hbar c}{4\pi^2 a^4(\eta)} B(a) - \frac{\hbar c}{4\pi^2 b^4(\eta)} B(b) \right] \quad (19)$$

با محاسبه حد مشاهده می‌شود که جمله دوم داخل کروشه به سمت صفر رفته و هیچ تاثیری در انرژی کازمیر باقی نخواهد گذاشت و بنابراین رابطه انرژی کازمیر میدان اسکالر جرم دار روی یک صفحه با توپولوژی S^3 بدست خواهد آمد. لذا داریم:

$$E_{Cas.} = \frac{\hbar c}{2\pi^2 a^4(\eta)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu^2}{2\pi^2 j^2} [2\pi \mu j K_1(2\pi \mu j) + 3K_2(2\pi \mu j)] \quad (20)$$

حد بدون جرم میدان اسکالر را براحتی می‌توان از رابطه بالا بدست آورده که به فرمت ذیل می‌باشد:

$$\begin{aligned} E_{Cas.} &= \frac{\hbar c}{2\pi^2 a^4(\eta)} \int_{\mu}^{\infty} \frac{t^3}{e^{2\pi t} - 1} dt = \frac{\hbar c}{2\pi^2 a^4(\eta)} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mu}^{\infty} t^3 e^{-2\pi t j} dt \\ &= \frac{\hbar c}{2\pi^2 a^4(\eta)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{3}{8\pi^4 j^4} = \frac{\hbar c}{480 a^4(\eta)} \end{aligned} \quad (21)$$

همچنین برای جرم های سنگین نتیجه محاسبات به عبارت زیر منتهی می‌شود:

$$E_{Cas.} \approx \frac{\hbar c \mu^2 \sqrt{\mu}}{8\pi^3 a^4(\eta)} e^{-2\pi \mu}$$

$$E_{Cas.} = \lim_{b/a \rightarrow \infty} [E_A^{(0)} - E_B^{(0)}] \quad (11)$$

که در آن $E_A^{(0)}$ و $E_B^{(0)}$ انرژی نقطه صفر مربوط به ساختار A و B می‌باشد. با در نظر گرفتن معادله (11) و رابطه (10) داریم:

$$\begin{aligned} E_A^{(0)} - E_B^{(0)} &= \frac{\hbar c}{4\pi^2 a^4(\eta)} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda^2 \left[\frac{m^2 c^2 a^2(\eta)}{h^2} + \lambda^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad - \frac{\hbar c}{4\pi^2 b^4(\eta)} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda^2 \left[\frac{m^2 c^2 b^2(\eta)}{h^2} + \lambda^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (12)$$

توضیح اینکه کلیه عبارات نوشته شده در رابطه (12) بدون محاسبه حد ها بوده و محاسبه حد های مندرج در رابطه (11) را در آخرین مرحله از محاسبات انجام خواهیم داد. با اعمال رابطه ایبل-پلانا به فرمت زیر روی هر یک از عبارتهای جمع فوق می‌توان روابط مربوطه را به انتگرال تبدیل نمود:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \frac{-1}{2} f(0) + \int_0^{\infty} f(x) dx + i \int_0^{\infty} \frac{f(it) - f(-it)}{e^{2\pi t} - 1} dt \quad (13)$$

در واقع با تبدیل کلیه جملات جمع به انتگرال منظم سازی دیگری به عبارات اضافه خواهد شد. اعمال رابطه فوق روی هر یک از عبارتهای جمع موجود در رابطه (12) هر یک از جمع ها (سیگما ها) را به سه جمله تبدیل می‌کند که در اینجا نام جمله اول در طرف راست رابطه ایبل پلانا را «جمله صفر» و جمله دوم را «جمله انتگرالی» و نام جمله سوم را «جمله برنچکات» می‌نامیم. با توجه به عبارت جمع موجود در معادله (12) مشخص است که جملات صفر دارای مقدار صفر خواهند بود و هیچ سهمی از این عبارات باقی نخواهد ماند. اما جملات انتگرالی واگرا بوده و اگر در کلیه جملات انتگرالی حاصل شده از اعمال رابطه (13) در رابطه (12) تغییر متغیر $z = \frac{c x}{a}$ را بکار ببریم در آن صورت کلیه جملات انتگرالی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} I &= \frac{\hbar c}{4\pi^2 a^4(\eta)} \int_0^{\infty} x^2 \left[\frac{m^2 c^2 a^2(\eta)}{h^2} + x^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx \\ &\quad - \frac{\hbar c}{4\pi^2 b^4(\eta)} \int_0^{\infty} x^2 \left[\frac{m^2 c^2 b^2(\eta)}{h^2} + x^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx \end{aligned} \quad (14)$$

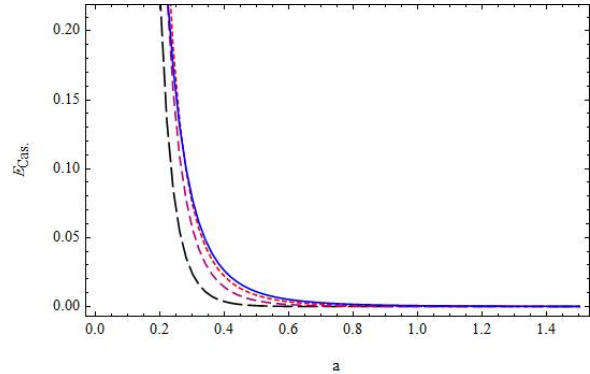
برای حذف واگرایی ناشی از جملات انتگرالی از منظم سازی مقدار قطع استفاده می‌کنیم. با قرار دادن مقدار قطع C و C' به ترتیب در حد بالای انتگرال های اول و دوم سمت راست رابطه (14) و محاسبه انتگرال ها توابعی برحسب C و C' بدست خواهد آمد. با تعیین مقادیر درستی از این دو مقدار قطع می‌توان کلیه واگرایی ها را حذف نمود. بنابراین آنچه از رابطه (12) باقی خواهد ماند تنها جملات برنچکات از ایبل پلانا است. برای اینکه از تکرار بعضی محاسبات مشابه جلوگیری گردد به عنوان نمونه یکی از عبارات برنچکات رابطه (12) را (به عنوان مثال ساختار A) را محاسبه می‌کنیم لذا داریم:

مرزی دیریکله، نیومن و ... نیز می توان تعمیم داد که البته این محاسبات توسط نگارنده در حال انجام می باشد.

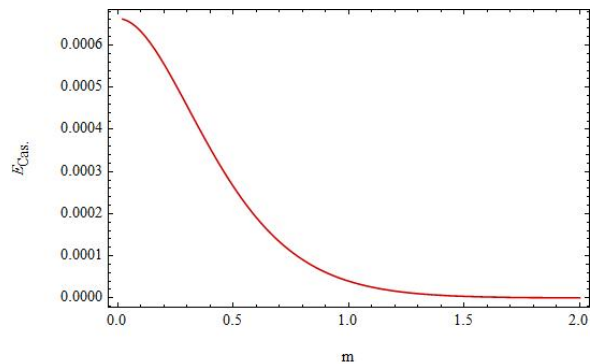
۴- مراجع

- [1] H. B. G. Casimir, Proc. Kon. Nederl. Akad. Wet., vol. 51, p. 793, 1948.
- [2] K. A. Milton, *The Casimir Effect: Physical Manifestations of Zero-Point Energy*, world Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2001.
- [3] M. J. Sparnaay, *Measurements of attractive forces between flat plates*, Physica, vol. 24, p. 751, 1958.
- [4] A. Chodos, R.L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn and V. Weisskopf, Phys. Rev. D, vol. 9, p. 3471, 1974.
- [5] J. M. Bordag, E. Elizalde, and K. Kirsten, J. Math. Phys. Vol. 37, p. 895, 1996.
- [6] F. De Martini, M. Marrocco, and P. Mataloni, Phys. Rev. A 43, 2480, 1991.
- [7] M. Krech, and S. Dietrich, Phys. Rev. Lett. Vol. 66, p. 345, 1991.
- [8] M. Krech, and S. Dietrich, Phys. Rev. Lett. Vol. 67, p. 1055, 1991.
- [9] F. De Martini and G. Jacobovitz, Phys. Rev. Lett. Vol. 60, p.1711 (1988).
- [10] E. Elizalde, Phys. Lett. B, vol. 516, p. 143 (2001).
- [11] F. Bauer, M. Lindner, and G. Seidl, JHEP, vol. 05, p. 026 (2004).
- [12] B. S. DeWitt, Phys. Rep., vol. 19, p. 297, 1975.
- [13] M. Bordag, U. Mohideen, and V. M. Mostepanenko, *New Developments in the Casimir Effect*, Phys. rep., vol. 353, p. 1, 2001.
- [14] V. V. Nesterenko and I. G. Pirozhenko, *Spectral Zeta Functions for a Cylinder and a Circle*, J. Math. Phys., vol. 41, p. 4521, 2000.
- [15] E. Elizalde, S. D. Odintsov, A. Romeo, A. A. Bytesenko and S. Zerbini, *Zeta Regularization Techniques with Applications*, Singapore: World Scientific, 1994.
- [16] K. A. Milton, L. L. Deraad and S. J., *Casimir self-stress on a perfectly conducting spherical shell*, Ann. Phys. (N.Y.), vol. 115, p. 388, 1978.
- [17] R. Balian, and B. Duplantier, *Electromagnetic waves near perfect conductors. II. Casimir effect*, Ann. Phys. (N.Y.), vol. 112, p. 165, 1978.
- [18] M. A. Valuyan, R. Moazzemi, and S. S. Gousheh, *A direct approach to the electromagnetic Casimir energy in a rectangular waveguide*, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys., vol. 41, p. 145502, 2008.
- [19] S.S. Gousheh, R. Moazzemi, M.A. Valuyan, Radiative correction to the Dirichlet Casimir energy for $\lambda\phi^4$ theory in two spatial dimensions, Phys. Lett. B, vol. 681, p. 477-483, 2009.
- [20] F. A. Barone, R. M. Cavalcanti and C. Farina, hep-th/0306011.
- [21] B. S. DeWitt, Phys. Rep., vol. 19, p. 297, 1975.
- [22] M. A. Valuyan, Casimir Energy Calculation with Box Subtraction Scheme in Curved Space, Accepted for publication in JVBME.
- [23] N.D. Berrel and P.C.W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge University Press, 1982.
- [24] M. Bordag, U. Mohideen, V.M. Mostepanenko, *New Developments in The Casimir effect*, Physics Reports, Vol. 353, p. 1, 2001.

(۲۲)



شکل ۲ در این نمودار میزان انرژی کازمیر برحسب تغییرات شعاع به ازاء جرم های متفاوت میدان $m = 2, 1, 0.5, 0.01$ رسم شده است. اولین نمودار سمت چپ به ازای $m = 2$ رسم شده است و به ترتیب از سمت چپ به راست در هر نمودار جرم نسبت به نمودار سمت چپ کاهش یافته است. روند این نمودار نشان می دهد انرژی کازمیر با افزایش شعاع به شدت افت می کند و در حد میدان بدون جرم با پاسخ بدست آمده از رابطه (۲۱) نیز همخوانی دارد. همچنین با افزایش جرم شیب کاهش انرژی کازمیر افزایش می یابد که البته این امر با انتظارات فیزیکی ما سازگاری مناسب دارد و در واقع این رفتار قابل انتظار است. در این نمودار $\hbar c = 1$ در نظر گرفته شده است.



شکل ۳ در این نمودار میزان انرژی کازمیر به ازاء $a = 1$ و برحسب تغییرات جرم رسم شده است. این نمودار بوضوح نشان می دهد که اولاً میزان انرژی کازمیر مثبت است و هر چه میزان جرم میدان بیشتر باشد میزان انرژی کازمیر آن کمتر خواهد بود. در این نمودار $\hbar c = 1$ در نظر گرفته شده است.

میزان این انرژی یک مقدار مثبت بدست آمده و نشان از دافعه بودن نیروی کازمیر موجود روی رویه می باشد. با توجه به نمودار شکل (۳) و همچنین رابطه بدست آمده (۲۱) هر چقدر ذره ای که روی رویه وجود دارد سنگینتر باشد مقدار انرژی کازمیر مرتبط با آن نیز کوچکتر بوده و برای ذره ای با جرم بسیار بزرگ میزان انرژی کازمیر برابر صفر است. نکته ای که توضیح آن در این مقاله ضروری است این است که برای انرژی کازمیر میدان جرم دار روی یک کره با شرط مرزی نوسانی پاسخ بدست آمده با آنچه در این مورد در مقالات گذشته آمده است همخوانی کامل وجود داشته [۲۴] که این امر خود موید بر توانمندی روش کم کردن جعبه ها در امر منظم سازی واگرایی ها است. البته روش کم کردن جعبه ها ما را از استفاده مجدد از بازهنجارش ثانویه معاف می نماید. همانطور که از متن محاسبات نیز روشن است از هیچیک از تکنیک های تمدید تحلیلی و مانند آن در محاسبه این انرژی استفاده نشده است و پاسخ (۲۰) بدون هیچگونه ابهامی بدست آمده است. موضوع این مقاله برای دیگر شرایط مرزی از جمله شرایط