

# منظم‌سازی کم کردن جعبه‌ها در محاسبه انرژی کازمیر برای میدان اسکالر با شرط مرزی پادنوسانی در یک بعد فضایی

مددعلی ولویان\*

استادیار، گروه علوم پایه (فیزیک)، واحد سمنان، دانشگاه آزاد اسلامی، سمنان، ایران

\* سمنان، صندوق پستی ۱۷۹ - ۳۵۱۴۵، m-valuyan@sbu.ac.ir

## چکیده

در این مقاله انرژی کازمیر مربوط به میدان اسکالر جرم دار بین دو نقطه در یک بعد فضایی با شرط مرزی پادنوسانی با استفاده از روش منظم‌سازی کم کردن جعبه‌ها محاسبه شده است. منظور از شرط مرزی پادنوسانی این است که میدان اسکالر روی یک حلقه با دو یا چند دور چرخش به مقدار اولیه خود برمی‌گردد. آنچه که در مقالات دیگر در این خصوص نوشته شده است محاسبه این انرژی با کم کردن انرژی نقطه صفر فضای مینکوفسکی از انرژی نقطه صفر با در نظر گرفتن شرط مرزی است که خود دارای ابهاماتی است اما پاسخ بدست آمده در این مساله بدون استفاده از تمدید تحلیلی بوده و در نتیجه عاری از هرگونه ابهام و یا پیچیدگی خاصی است و ضمناً پاسخ بدست آمده با آنچه در دیگر مقالات گذشته در این خصوص آمده است سازگاری دارد. معمولاً روش کم کردن جعبه‌ها در محاسبه انرژی کازمیر برای مرتبه صفر با آنچه از روشهای دیگر بدست آمده است سازگاری دارد اما در بعضی موارد همچون مرتبه اول تصحیح تابشی انرژی کازمیر در دو بعد فضایی مشاهده شده است که این روش دست برتر را داشته و این امر خود برتری این روش از منظم‌سازی نسبت به دیگر روشها نشان می‌دهد. در پایان در این مقاله با ترسیم و نمایش رابطه انرژی کازمیر بدست آمده و بررسی شرایط حدی در خصوص سازگاری مناسب و منطقی بین جوابهای بدست آمده در این مقاله در مقایسه با آنچه در کتب و مقالات گذشته بدست آمده بود، بحث خواهد شد.

## کلیدواژگان

انرژی کازمیر، کم کردن جعبه‌ها، منظم‌سازی، ارتعاشات خلاً، فرکانس

## Box Subtraction Scheme in the Anti-Periodic Casimir Energy Calculation for Scalar Field in One Spatial Dimension

Madad Ali Valuyan\*

Department of Mechanical Engineering, Semnan Branch, Islamic Azad University, Semnan, Iran

\* P.O.B. 35145-179, Semnan, Iran, m-valuyan@sbu.ac.ir

### Abstract:

In this paper we investigate the Casimir energy for systems with Anti-Periodic Boundary Conditions (BCs) in one spatial dimension by Box Subtraction Scheme (BSS). The BSS is a slight modification of Boyer's subtraction method to remove divergences from expressions in the Casimir energy calculation. The more routine method which involves many regularization and analytic continuation procedures has some ambiguities. These ambiguities have been described recently in some papers. However, in this paper we shall investigate some of them and also we describe the main ingredient of the BSS in the subtraction of two comparable configurations for our problem. Usually, two approaches in the Leading order Casimir energy are yield identical results but the latter regularization has more manifest way to remove divergences from expressions. So it could be the best instrument for us to remove complicated divergences which appear in the higher order radiative corrections to the Casimir energy. Extracting and obtaining of finite results from complicated divergent expressions without resorting to any analytic continuation techniques is also the other privilege of the BSS. In this paper we use this regularization method to obtain the Casimir energy and in final we compare our results with those reported in the literature, which are obtained from other regularization techniques.

### Keywords:

Casimir Energy, Box Subtraction Scheme, Regularization, Vacuum Polarization, Frequency

کوانتومی میدان<sup>۳</sup> است که از آن می‌توان تغییر دو قطبش خلاً<sup>۴</sup> که توسط شرایط مرزی یا هندسه به وجود می‌آید را درک نمود. به بیانی ساده تر اینکه هر گاه انرژی نقطه صفر<sup>۵</sup> خلاً میدان الکترومغناطیس یا هر میدان دیگری نظیر میدان اسکالر، میدان دیراک<sup>۶</sup> و ... دستخوش تغییر واقع می‌شود این اثر پدیدار می‌گردد. این اثر در سال ۱۹۴۸ توسط هندریک کازمیر<sup>۷</sup> پیش بینی و

## ۱- مقدمه

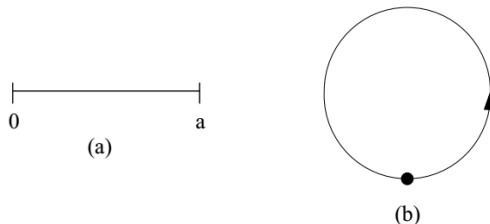
امروزه همانطور که می‌دانیم انرژی کازمیر از اختلاف بین دو انرژی خلاً<sup>۱</sup> در صورت حضور شرط مرزی غیر بدیهی<sup>۲</sup> و عدم حضور شرط مرزی حاصل می‌شود. با محاسبه گرادیان این انرژی نسبت به ابعاد شرایط مرزی و یا ساختار موجود می‌توان نیروی کازمیر وارد بر آن ساختار را بدست آورد. در واقع اثر کازمیر یکی از تجلیات ویژگی‌های غیر بدیهی حالت خلاً در نظریه

3. Quantum Field Theory  
4 Vacuum polarization  
5. Zero point energy  
6. Dirac Field  
7 H.B.G. Casimir

1 Zero point energy  
2. Non-trivial boundary condition

پیدچیدگی‌های که منتج از تمدید تحلیلی است در محاسبات مساله وارد نخواهد شد. از دیگر مزیت‌های اثبات شده این منظم‌سازی بکارگیری موفق آن در مرتبه‌های بالاتر تصحیح تابشی انرژی کازمیر [۱۰] بوده است که منجر به دست‌یابی به پاسخی همگرا و سازگار گردیده است و این در حالی است که در دیگر روش‌های منظم‌سازی علاوه بر استفاده از تمدید تحلیلی پاسخ انرژی کازمیر نیز واگرا به دست آمده است.

با توجه به اینکه اثر کازمیر بعدها به عنوان اثر منحصر به فرد و بسیار جالب از قطبش (ارتعاشات) خلاء شناخته شد لذا جوانب و کاربرد‌های فراوانی برای آن پدیدار گشته است. این اثر، نقش مهمی در حوزه‌های متعدد فیزیک، نظیر QFT [۱۵-۲۰]، فیزیک ماده چگال [۲۱-۲۴]، فیزیک اتمی-ملکولی، گرانش، کیهان‌شناسی [۲۵-۲۶] و ریاضی فیزیک [۲۷] ایفا می‌کند. بررسی اثرات کوانتومی روی جهان شامه‌ها<sup>۱</sup> یکی از موارد جالب اثرات پدیده شناختی اثر کازمیر به شمار می‌رود. در مسائلی مربوط به جهان شامه‌ها و میدانهای فعال روی این شامه‌ها است، بررسی انرژی کازمیر در بررسی پایداری و یا عدم پایداری جهان شامه‌ها بسیار مورد توجه بوده است. همچنین سناریوی نقش اثرات کوانتومی در تشکیل جهان شامه‌ها و خود سازگاری این جهان شامه‌ها و ثابت کیهان‌شناسی آنان در مقالات زیادی در گذشته مورد توجه بوده است [۲]. بررسی انرژی کازمیر روی رویه‌های خمیده و تخت با شرایط مرزی متفاوت همیشه مورد توجه خاص فیزیک دانان خبره در این عرصه از فیزیک گرانش بوده است. همانطور که در اکثر تعاریف از انرژی کازمیر مطرح می‌شود وجود یک پس زمینه و یا عدم وجود آن خود می‌تواند منجر به اختلاف در انرژی نقطه صفر خلا گردد که منجر به وجود یک نیروی کازمیر خواهد شد. در این مقاله انرژی کازمیر مربوط به میدان نرده ای جرم دار بین دو نقطه با شرط مرزی پادنوسانی<sup>۲</sup> با استفاده از روش کم کردن جعبه‌ها محاسبه خواهد شد. برای اینکه شرط مرزی پادنوسانی را بیشتر بشناسیم به رسم شکلی در این



**شکل ۱:** در این شکل نمایشی از شرط مرزی نوسانی در یک بعد فضایی رسم شده است. هر گاه در یک بعد فضایی میدان کوانتومی دارای شرط مرزی نوسانی باشد بدین معناست که میدان کوانتومی روی یک حلقه تعریف شده است. اما در شرط مرزی پادنوسانی میدان پس از دو دور چرخش به مقدار اولیه خود بر می‌گردد.

خصوص پرداخته و سعی می‌شود با نمایشی ساده شرط مرزی نوسانی را به تصویر در آوریم. اگر فرض کنیم میدان در یک بعد فضایی پس از طی مسافتی به اندازه  $a$  دوباره به مقدار اول خود بر می‌گردد بنابراین می‌توان در یک بعد فضایی برای مقادیر میدان کوانتومی یک حلقه را متصور شد که پس از طی یک دور کامل که در اینجا یک دور کامل همان  $a$  است میدان مقدار

محاسبه گردید. او میزان جاذبه بین دو صفحه رسانا بدون بار موازی را که در خلا هستند برای قطبش‌های میدان الکترومغناطیس توضیح می‌دهد [۱]. شاید داشتن تصویری از میزان این نیرو براساس آنچه کازمیر پیش بینی نموده است در اینجا مناسب باشد. میزان این نیرو بر یک سانتی متر مربع طبق رابطه زیر مشخص می‌شود:

$$F = -\frac{\hbar c}{240} \frac{\pi^2}{R^4} \quad (1)$$

برای اینکه بهتر بتوان درک بهتری در مورد اندازه این نیرو دست یافت لازم است مقایسه‌ای انجام شود. در واقع این نیرو معادل این است که به یک صفحه به مساحت  $1 \text{ cm}^2$  که به فاصله  $1 \mu\text{m}$  از هم قرار دارد نیرویی جاذبه به اندازه  $0.013 \text{ dyne}$  وارد شود. اندازه نیرو معادل نیروی گرانش بین دو جسم  $0.5$  کیلوگرمی است که به فاصله  $1 \text{ cm}$  از هم قرار گرفته‌اند و یا معادل  $\frac{1}{1000}$  وزن یک مگس است. همانطور که از رابطه (۱) نیز مشخص است میزان این نیرو با اندازه فاصله بین صفحات مرتبط بوده و با کوچکتر شدن این فاصله، با نسبت  $\frac{1}{R^4}$  افزایش می‌یابد [۲]. پس از اینکه مدت مدیدی مقاله کازمیر ناشناخته باقی ماند، اولین تلاش برای مشاهده این پدیده تقریباً ده سال بعد توسط اسپارنای<sup>۱</sup> در سال ۱۹۵۸ انجام پذیرفت [۳] و بعدها نیز اندازه‌گیری‌های دقیقتری بر درستی پیش‌بینی کازمیر صحه گذاشتند.

محاسبه انرژی کازمیر همیشه مستلزم کم کردن دو عبارت بینهایت از یکدیگر است که این امر همیشه به سادگی انجام نمی‌پذیرد. در واقع در راستای انجام این امر نیاز به روش‌های متفاوت منظم‌سازی و یا بازهنجارش<sup>۲</sup> می‌باشد [۴]. روش‌های متفاوتی برای محاسبه انرژی کازمیر اعم از منظم‌سازی و بازهنجارش طراحی شده است و بسته به نوع مساله و چگونگی واگرایی‌های موجود در مساله هریک از این بازهنجارش‌ها و یا منظم‌سازی‌ها اهمیت فوق‌العاده‌ای پیدا خواهد کرد. لذا لزوم محاسبه انرژی کازمیر خود بهانه‌ای برای تدوین روشها و تکنیک‌های متفاوت منظم‌سازی<sup>۳</sup> در جهت حذف واگرایی‌ها گردید و به سرعت تکنیک‌های بسیار زیادی در این راستا معرفی شده است که از آن جمله می‌توان به تکنیک منظم‌سازی تابع زتا<sup>۴</sup> [۵، ۶]، منظم‌سازی تابع گرین<sup>۵</sup> [۷]، منظم‌سازی بسط چند جمله‌ای پراکندگی<sup>۸</sup>، منظم‌سازی کم کردن جعبه‌ها<sup>۹</sup> [۹] و... اشاره نمود. در خصوص هریک از این منظم‌سازی‌ها و مزیت‌ها و یا معایب احتمالی آنها در کتب و مقالات گذشته مطالب فراوانی یافت می‌شود [۱۰-۱۲] که با توجه به اینکه در این مقاله از روش کم کردن جعبه‌ها استفاده می‌شود لازم است چند نکته در خصوص مزیت‌های روش مذکور نسبت به دیگر روشها ذکر شود. روش کم کردن جعبه‌ها در گذشته و می‌توان گفت برای اولین بار توسط بویر مطرح گردید و برای محاسبه انرژی کازمیر یک کره سه بعدی با میدان الکترومغناطیس بکارگیری شده است و پس از آن نیز در مقالات زیادی اعم از [۹، ۱۳-۱۴] استفاده شده است. نکته مهم و بارز در این روش کم کردن دو بینهایت (واگرایی) همسان است که خود باعث می‌شود بسیاری از مشکلات دیگر روشها که انرژی نقطه صفر فضای مینوکوفسکی را از انرژی نقطه صفر غیر بدیهی کم می‌کنند بروز و ظهور نیابد. همچنین هیچ تمدید تحلیلی نیز در انجام این محاسبات استفاده نمی‌شود و بنابراین کلیه ابهامات و

1. M. J. Sparnaay  
2. Renormalization  
3. Regularization techniques  
4. Zeta function regularization  
5. Green's function regularization  
6. Box subtraction scheme

7. Quantum Field Theory  
8. Braneworld  
9. Anti-Periodic boundary condition

که در آن  $E_B^{(0)} = E_{b1}^{(0)} + 2E_{b2}^{(0)}$  و  $E_A^{(0)} = E_{a1}^{(0)} + 2E_{a2}^{(0)}$  انرژی نقطه صفر مربوط به ساختار  $A$  و  $B$  می باشد. برای سادگی همچنین  $\hbar = c = 1$  در نظر گرفته می شود. با در نظر گرفتن معادله (۳) برای ناحیه  $a$  می توان انرژی نقطه صفر را به صورت زیر ساده نمود:

$$E_{a1}^{(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ m^2 + \left[ \frac{2\pi}{a} \left( n + \frac{1}{2} \right) \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

رابطه (۵) را می توان با جایگذاری فاصله هر ناحیه به جای  $a$  انرژی نقطه صفر مربوط به آن ناحیه را ساخت. در نهایت با جایگذاری  $E_{a1}^{(0)}$  و  $E_{b1}^{(0)}$  و  $E_{a2}^{(0)}$  و  $E_{b2}^{(0)}$  در معادله (۴) داریم:

$$E_A^{(0)} - E_B^{(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ m^2 + \left[ \frac{2\pi}{a} \left( n + \frac{1}{2} \right) \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[ m^2 + \left[ \frac{4\pi}{L-a} \left( n + \frac{1}{2} \right) \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \sum_{n=0}^{\infty} \left[ m^2 + \left[ \frac{2\pi}{b} \left( n + \frac{1}{2} \right) \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[ m^2 + \left[ \frac{4\pi}{L-b} \left( n + \frac{1}{2} \right) \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

توضیح اینکه کلیه عبارات نوشته شده در رابطه (۶) بدون محاسبه حد ها بوده و محاسبه حد های مندرج در رابطه (۴) را در آخرین مرحله از محاسبات انجام خواهیم داد. با اعمال رابطه ایبل-پلانا به فرمت زیر روی هر یک از عبارتهای جمع فوق می توان روابط مربوطه را به انتگرال تبدیل نمود:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f\left(n + \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} f(x) dx - i \int_0^{\infty} \frac{f(it) - f(-it)}{e^{2\pi t} + 1} dt \quad (7)$$

در واقع با تبدیل کلیه جملات جمع به انتگرال منظوم سازی دیگری به عبارات اضافه خواهد شد. اعمال رابطه فوق روی هر یک از عبارتهای جمع موجود در رابطه (۶) هر یک از جمع ها (سیگماها) را به دو جمله تبدیل می کند که در اینجا نام جمله اول در طرف راست رابطه ایبل پلانا را «جمله انتگرالی» و نام جمله دوم را «جمله برنچکات» می نامیم. اگر در کلیه جملات انتگرالی حاصل شده از اعمال رابطه (۷) در رابطه (۶) تغییر متغیر  $z = \frac{2\pi x}{a}$  را بکار ببریم در آن صورت کلیه جملات انتگرالی به صورت زیر بدست می آید:

$$I = \frac{a}{2\pi} \int_0^{\infty} [m^2 + z^2]^{\frac{1}{2}} dz + 2 \frac{L-a}{4\pi} \int_0^{\infty} [m^2 + z^2]^{\frac{1}{2}} dz - \frac{b}{2\pi} \int_0^{\infty} [m^2 + z^2]^{\frac{1}{2}} dz - 2 \frac{L-b}{4\pi} \int_0^{\infty} [m^2 + z^2]^{\frac{1}{2}} dz \quad (8)$$

همانطور که از روابط انتگرالی مشخص است همه انتگرالها واگرا هستند اما با فاکتور گیری از انتگرالها مشخص می شود در مجموع ضرایب این انتگرالها صفر است لذا مجموع کلیه جملات انتگرالی قبل از محاسبه حد رابطه (۴) به صورت تحلیلی و به ازاء هر مقدار از  $a$ ،  $b$  و  $L$  به صورت خودبخودی صفر می شود.

$$I = \left( \frac{a}{2\pi} + \frac{L-a}{2\pi} - \frac{b}{2\pi} - \frac{L-b}{2\pi} \right) \int_0^{\infty} [m^2 + z^2]^{\frac{1}{2}} dz = 0 \quad (9)$$

اولیه خود برابر می شود. حال اگر خواهیم طبق رابطنی زیر شرط مرزی پادنوسانی را بشناسیم داریم: [۴،۲۸]

(۲)

که در آن  $a$  فاصله دو نقطه از یکدیگر است. در واقع در این شرط مرزی به نظر می رسد میدان کوانتومی با تعدادی زوج از چرخش به مقدار اولیه خود بر می گردد.

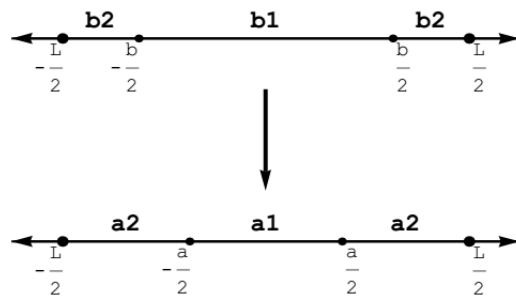
در بخش بعد پس از بدست آوردن انرژی کازمیر برای میدان جرم دار مساله را برای حالتی خاصی چون میدان بدون جرم و یا میدانی با جرم سنگین نیز محاسبه خواهیم کرد و در نهایت نیز نتایج حاصله را با نتایج انرژی کازمیر که در گذشته بدست آمده است مقایسه خواهد شد.

## ۲- محاسبه انرژی کازمیر

انرژی نقطه صفر خلا برای میدان اسکالر جرم دار با شرط مرزی پادنوسانی ذکر شده در رابطه (۲) برای یک بعد فضایی بین دو نقطه به فاصله  $a$  از یکدیگر از طریق محاسبه مقدار انتظاری تانسور انرژی-تنگانه به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$E^{(0)} = \langle 0 | T_{00}(x) | 0 \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \hbar \omega_n \quad (3)$$

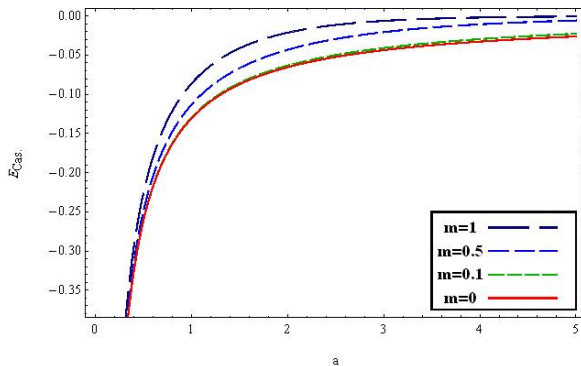
که در آن  $\omega_n = c \sqrt{\frac{4\pi^2}{a^2} \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}}$  فرکانسهای مجاز به ازاء تغییرات  $n$  می باشد. با توجه به مقدماتی که در بخش قبل در خصوص منظوم سازی واگرایی ها و مزیت ها و مضرات آن بیان شد برای بدست آوردن انرژی کازمیر در این مساله از روش منظوم سازی کم کردن جعبهها استفاده خواهد شد. برای پیاده سازی روش منظوم سازی جعبه در این مساله همانند شکل (۲) دو جعبه یک بعدی را در نظر می گیریم. در شکل (۲) به ساختار پایینی ساختار  $A$  و به ساختار بالایی ساختار  $B$  گوئیم و  $a1, a2, b1, b2$  نامگذاری هایی است که برای هر ناحیه ایجاد شده بین نقاط در ساختارهای مذکور استفاده شده است. انرژی کازمیر براساس تعریف آن و با توجه به جعبه های در نظر گرفته شده به صورت زیر نوشته خواهد شد: [۳۰]



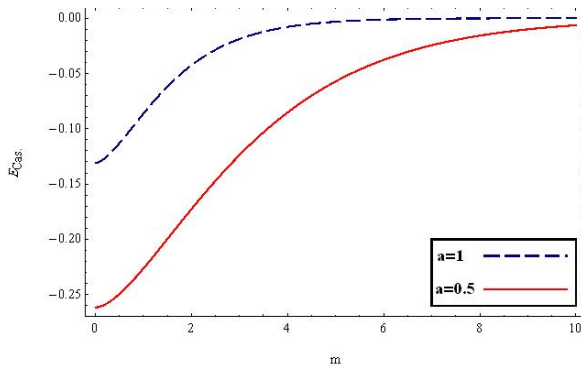
شکل ۲: در این شکل چگونگی در نظر گرفتن ساختارها در روش کم کردن جعبه ها نمایش داده شده است. ساختار بالایی را ساختار  $B$  و ساختار پایینی را ساختار  $A$  گوئیم.

$$E_{Cas.} = \lim_{b/a \rightarrow \infty} \left[ \lim_{L/b \rightarrow \infty} [E_A^{(0)} - E_B^{(0)}] \right] \quad (4)$$

$$E_{Cas.} \rightarrow \begin{cases} \frac{-\pi}{24a} & \text{as } m \rightarrow 0 \\ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2aj^2} \sqrt{\frac{maj}{2\pi}} e^{-maj} & \text{as } ma \gg 1 \end{cases} \quad (16)$$



شکل ۳: در این نمودار میزان انرژی کازمیر به ازاء جرم های  $m = 1, 0.5, 0.1, 0$  برحسب فاصله بین دو نقطه رسم شده است. روند این نمودار نشان می دهد حد بدون جرم از رابطه انرژی کازمیر جرم دار با آنچه از معادله (۱۶) بدست آمده تطابق دارد.



شکل ۴: در این نمودار میزان انرژی کازمیر به ازاء دو فاصله مشخص  $a = 1, 0.5$  برحسب تغییرات جرم میدان رسم شده است. این نمودار بوضوح نشان می دهد که هر چه میزان جرم میدان کمتر باشد تغییرات انرژی کازمیر آن برای فواصل یکسان از شرایط مرزی بیشتر خواهد بود.

با توجه به علامت منفی انرژی کازمیر بدست آمده می توان اینطور استنباط نمود که نیروی کازمیر موجود بین دو نقطه جاذبه بوده و روند اندازه این انرژی نیز با توجه به آنچه در نمودار شکل (۳) رسم شده است، نشان می دهد هرچه جرم ذره کاهش یابد میزان اندازه نیروی وارده نیز افزایش یافته تا جاییکه برای میدان بدون جرم بیشترین میزان نیرو بین دو نقطه قابل تصور است. این امر را می توان براحتی از نمودار شکل (۴) نیز ملاحظه کرد. لازم به توضیح است که پاسخ این مقاله برای انرژی کازمیر میدان جرم دار در یک بعد فضایی با شرط مرزی پادنوسانی با آنچه در این مورد در مقالات گذشته آمده است همخوانی داشته [۴] که این امر خود موید بر توانمندی روش کم کردن جعبه ها در امر منظم سازی واگرایی ها است.

### ۳- مراجع

- [1] H. B. G. Casimir, Proc. Kon. Nederl. Akad. Wet., vol. 51, p. 793, 1948 .
- [2] K. A. Milton, *The Casimir Effect: Physical Manifestations of Zero-Point Energy*, world Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2001 .

بنابراین آنچه از رابطه (۶) باقی خواهد ماند تنها جملات برنچکات از ایل پلان است. برای اینکه از تکرار بعضی محاسبات مشابه جلوگیری گردد به عنوان نمونه یکی از عبارات برنچکات رابطه (۶) را (به عنوان مثال ناحیه  $a1$ ) را محاسبه می کنیم لذا داریم:

$$\begin{aligned} \frac{f(it) - f(-it)}{e^{2\pi t} + 1} &= \frac{\left[ m^2 + e^{it} \left[ \frac{2\pi}{a} t \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \left[ m^2 + e^{-it} \left[ \frac{2\pi}{a} t \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{e^{2\pi t} + 1} \\ &= \frac{e^{\frac{it}{2}} \left[ -m^2 + \left[ \frac{2\pi}{a} t \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{it}{2}} \left[ -m^2 + \left[ \frac{2\pi}{a} t \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{e^{2\pi t} + 1} \\ &= 2i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{\left[ -m^2 + \left[ \frac{2\pi}{a} t \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{e^{2\pi t} + 1} \quad t \geq \frac{ma}{2\pi} \end{aligned} \quad (10)$$

با استفاده از عبارت بدست آمده در رابطه (۱۰) برای جمله برنچکات ناحیه  $a1$  داریم:

$$B(a) = \int_{\frac{ma}{2\pi}}^{\infty} \frac{\left[ -m^2 + \left[ \frac{2\pi}{a} t \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{e^{2\pi t} + 1} dt \quad (11)$$

متأسفانه انتگرال فوق به صورت تحلیلی قابل محاسبه نبوده و دارای فرم بسته نمی باشد لذا برای محاسبه آن مخرج کسر را با استفاده از رابطه زیر را به صورت یک عبارت جمع می نویسیم:

$$\frac{1}{e^{2\pi t} + 1} = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j e^{-2\pi t j} \quad (12)$$

لذا با استفاده از روابط (۱۱) و (۱۲) داریم:

$$\begin{aligned} B(a) &= \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \int_{\frac{ma}{2\pi}}^{\infty} \left[ -m^2 + \left[ \frac{2\pi}{a} t \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi t j} dt \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{mK_1(maj)}{2\pi j} \end{aligned} \quad (13)$$

با جایگذاری  $b = \frac{L-a}{2}$  و  $b = \frac{L-b}{2}$  بجای  $a$  در رابطه (۱۳) به ترتیب می توان بخش برنچکات مربوط به هریک از ناحیه های  $a2$  و  $b1$  و  $b2$  را محاسبه نمود. با جایگذاری جملات برنچکات بدست آمده و استفاده از رابطه (۴) داریم:

$$E_{Cas.} = \lim_{b/a \rightarrow \infty} \left[ \lim_{L/b \rightarrow \infty} \left[ B(a) + 2B\left(\frac{L-a}{2}\right) - B(b) - 2B\left(\frac{L-b}{2}\right) \right] \right] \quad (14)$$

حال با توجه به خواصی که از تابع اصلاح شده بسل  $K_n(x)$  می شناسیم می توان حد های مربوط به ابعاد جعبه را محاسبه نمود. با محاسبه حد اول مشاهده می شود که جمله دوم و چهارم داخل کروشه به سمت صفر رفته و هیچ تاثیری در انرژی کازمیر باقی نخواهد گذاشت. با محاسبه حد  $b/a \rightarrow \infty$  جمله سوم نیز صفر خواهد شد و بنابراین رابطه انرژی کازمیر میدان اسکالر جرم دار بین دو نقطه در یک فضای یک بعدی با شرط مرزی پادنوسانی به صورت زیر می باشد:

$$E_{Cas.} = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{mK_1(maj)}{2\pi j} \quad (15)$$

محاسبه پاسخ مذکور برای میدانهای بدون جرم و یا میدانی با جرمهایی بسیار بزرگ به عبارات زیر منتهی می شود:

- [3] M. J. Sparnaay, *Measurements of attractive forces between flat plates*, Physica, vol. 24, p. 751, 1958 .
- [4] M. Bordag, U. Mohideen, and V. M. Mostepanenko, *New Developments in the Casimir Effect*, Phys. rep., vol. 353, p. 1, 2001 .
- [5] V. V. Nesterenko and I. G. Pirozhenko, *Spectral Zeta Functions for a Cylinder and a Circle*, J. Math. Phys., vol. 41, p. 4521, 2000 .
- [6] E. Elizalde, S. D. Odintsov, A. Romeo, A. A. Bytesenko and S. Zebrini, *Zeta Regularization Techniques with Applications*, Singapore: World Scientific, 1994 .
- [7] K. A. Milton, L. L. Deraad and S. J., *Casimir self-stress on a perfectly conducting spherical shell*, Ann. Phys. (N.Y.), vol. 115, p. 388, 1978 .
- [8] R. Balian, and B. Duplantier, *Electromagnetic waves near perfect conductors. II. Casimir effect*, Ann. Phys. (N.Y.), vol. 112, p. 165, 1978 .
- [9] M. A. Valuyan, R. Moazzemi, and S. S. Gousheh, *A direct approach to the electromagnetic Casimir energy in a rectangular waveguide*, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys., vol. 41, p. 145502, 2008 .
- [10] S.S. Gousheh, R. Moazzemi, M.A. Valuyan, *Radiative correction to the Dirichlet Casimir energy for  $\lambda\phi^4$  theory in two spatial dimensions*, Phys. Lett. B, vol. 681, p. 477–483, 2009 .
- [11] F. A. Barone, R. M. Cavalcanti and C. Farina, hep-th/0306011 .
- [12] B. S. DeWitt, Phys. Rep., vol. 19, p. 297, 1975.
- [13] M. A. Valuyan and S.S. Gousheh, *Dirichlet Casimir Energy For A Scalar Field in a Sphere: An Alternative Method*, International Journal of Modern Physics A, Vol. 25, No. 6, p. 1165, 2010.
- [14] Reza Moazzemi; Siamak S. Gousheh, *A new renormalization approach to the Dirichlet Casimir effect for  $\phi^4$  theory in 1+1 dimensions*, Phys. Lett. B, vol. 658, pp. 255-265, 2008 .
- [15] A. Chodos, R.L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn and V. Weisskopf, Phys. Rev. D, vol. 9, p. 3471 , 1974.
- [16] R. K. Bhaduri, *Models of the Nucleon* (Addison-Wesley, Redwood City, California, 1988).
- [17] Kimball A. Milton, Phys. Rev. D, vol. 22, p. 1444, 1980.
- [18] Kimball A. Milton, Phys. Rev. D, vol. 22, p. 1441, 1980.
- [19] A. Romeo, Phys. Rev. D, vol. 52, p. 7308, 1995.
- [20] M. Bordag, E. Elizalde, and K. Kirsten, J. Math. Phys. Vol. 37, p. 895, 1996.
- [21] F. De Martini, M. Marrocco, and P. Mataloni, Phys. Rev. A 43, 2480, 1991.
- [22] M. Krech, and S. Dietrich, Phys. Rev. Lett. Vol. 66, p. 345, 1991.
- [23] M. Krech, and S. Dietrich, Phys. Rev. Lett. Vol. 67, p. 1055, 1991.
- [24] F. De Martini and G. Jacobovitz, Phys. Rev. Lett. Vol. 60, p.1711 (1988).
- [25] E. Elizalde, Phys. Lett. B, vol. 516, p. 143 (2001).
- [26] F. Bauer, M. Lindner, and G. Seidl, JHEP, vol. 05, p. 026 (2004).
- [27] B. S. DeWitt, Phys. Rep., vol. 19, p. 297, 1975 .
- [28] N.D. Berrel and P.C.W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge University Press, 1982.